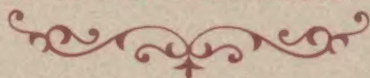
武汉大学优秀博士学位论文文库



实流形在复流形中的全纯不变量

Holomorphic Invaricants of Real Submanifolds in Complex Manifolds

尹万科 著





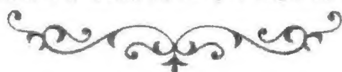
WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社



■ 责任编辑 / 顾素萍　■ 责任校对 / 汪欣怡　■ 版式设计 / 马　佳　■ 封面设计 / 罗　π


ISBN 978-7-307-12152-2
9 787307 121522 >
定价: 18.00元

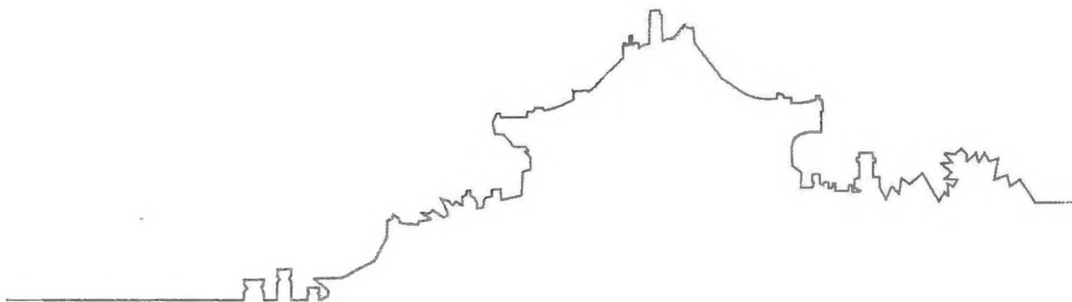
武汉大学优秀博士学位论文文库



实流形在复流形中的全纯不变量

Holomorphic Invaricants of Real Submanifolds in Complex Manifolds

尹万科 著





WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实流形在复流形中的全纯不变量/尹万科著.—武汉：武汉大学出版社,2014.1
武汉大学优秀博士学位论文文库
ISBN 978-7-307-12152-2

Ⅰ.实… Ⅱ.尹… Ⅲ.多复变函数 Ⅳ.O174.56

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 273848 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:汪欣怡　　版式设计:马　佳

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
　　　　(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)
印刷:湖北恒泰印务有限公司
开本：720×1000　1/16　印张:7.5　字数:104 千字　插页:2
版次:2014 年 1 月第 1 版　2014 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-12152-2　定价:18.00 元

总　序

创新是一个民族进步的灵魂,也是中国未来发展的核心驱动力。研究生教育作为教育的最高层次,在培养创新人才中具有决定意义,是国家核心竞争力的重要支撑,是提升国家软实力的重要依托,也是国家综合国力和科学文化水平的重要标志。

武汉大学是一所崇尚学术、自由探索、追求卓越的大学。美丽的珞珈山水不仅可以诗意栖居,更可以陶冶性情、激发灵感。更为重要的是,这里名师荟萃、英才云集,一批又一批优秀学人在这里砥砺学术、传播真理、探索新知。一流的教育资源,先进的教育制度,为优秀博士学位论文的产生提供了肥沃的土壤和适宜的气候条件。

致力于建设高水平的研究型大学,武汉大学素来重视研究生培养,是我国首批成立有研究生院的大学之一,不仅为国家培育了一大批高层次拔尖创新人才,而且产出了一大批高水平科研成果。近年来,学校明确将"质量是生命线"和"创新是主旋律"作为指导研究生教育工作的基本方针,在稳定研究生教育规模的同时,不断推进和深化研究生教育教学改革,使学校的研究生教育质量和知名度不断提升。

博士研究生教育位于研究生教育的最顶端,博士研究生也是学校科学研究的重要力量。一大批优秀博士研究生,在他们学术创作最激情的时期,来到珞珈山下、东湖之滨。珞珈山的浑厚,奠定了他们学术研究的坚实基础;东湖水的灵动,激发了他们学术创新的无限灵感。在每一篇优秀博士学位论文的背后,都有博士研究生们刻苦钻研的身影,更有他们的导师的辛勤汗水。年轻的学者们,犹如在海边拾贝,面对知识与真理的浩瀚海洋,他们在导师的循循善诱下,细心找寻着、收集着一片片靓丽的贝壳,最终把它们连成一串串闪闪夺

目的项链。阳光下的汗水，是他们砥砺创新的注脚；面向太阳的远方，是他们奔跑的方向；导师们的悉心指点，则是他们最值得依赖的臂膀！

博士学位论文是博士生学习活动和研究工作的主要成果，也是学校研究生教育质量的凝结，具有很强的学术性、创造性、规范性和专业性。博士学位论文是一个学者特别是年轻学者踏进学术之门的标志，很多博士学位论文开辟了学术领域的新思想、新观念、新视阈和新境界。

据统计，近几年我校博士研究生所发表的高质量论文占全校高水平论文的一半以上。至今，武汉大学已经培育出 18 篇“全国百篇优秀博士学位论文”，还有数十篇论文获“全国百篇优秀博士学位论文提名奖”，数百篇论文被评为“湖北省优秀博士学位论文”。优秀博士结出的累累硕果，无疑应该为我们好好珍藏，装入思想的宝库，供后学者慢慢汲取其养分，吸收其精华。编辑出版优秀博士学位论文文库，即是这一工作的具体表现。这项工作既是一种文化积累，又能助推这批青年学者更快地成长，更可以为后来者提供一种可资借鉴的范式亦或努力的方向，以鼓励他们勤于学习，善于思考，勇于创新，争取产生数量更多、创新性更强的博士学位论文。

武汉大学即将迎来双甲华诞，学校编辑出版该文库，不仅仅是为百廿武大增光添彩，更重要的是，当岁月无声地滑过 120 个春秋，当我们正大踏步地迈向前方时，我们有必要回首来时的路，我们有必要清晰地审视我们走过的每一个脚印。因为，铭记过去，才能开拓未来。武汉大学深厚的历史底蕴，不仅在于珞珈山的一草一木，也不仅仅在于屋檐上那一片片琉璃瓦，更在于珞珈山下的每一位学者和学生。而本文库收录的每一篇优秀博士学位论文，无疑又给珞珈山注入了新鲜的活力。不知不觉地，你看那珞珈山上的树木，仿佛又茂盛了许多！

李晓红

2013 年 10 月于武昌珞珈山

创新性简介

Bishop 曲面的概念是由 Bishop 在他 1965 年的一个著名工作中首先提出来的，Bishop 本人以及 Moser 和 Webster 等著名数学家对这一曲面进行了极其深入的研究. 其中，对于 Bishop 不变量为 0 的椭圆情形，Moser 在其 1985 年的工作中研究了其中的一种特殊情况，并提出了两个问题，其中第一个关于曲面局部全纯凸包的问题由 Huang-Krantz 在他们 1995 年的工作 [HK95] 中所解决.

本文的内容是基于我和我的导师黄孝军教授分别在 2007 年 3 月和 2008 年 2 月合作完成的文章 [HY07] 和 [HY08]，我们的主要工作之一就是对 Moser 提出的第二个问题给出了一个否定的答案. 下面介绍一下我们的创新点：

首先，我们引入了一个不同于以往的 weight 理论，即定义 $z, \bar{z}$ 的 weight 分别为 1 和 $s-1$. 与以往 (如 [CM74]、[MW83] 和 [Mos85] 等) 处理这类问题不同的是，我们不再以二次曲面 $w=|z|^2$ 为模型空间，取而代之的是 $w=|z|^2+z^s$. $|z|^2+z^s$ 不是一个齐次函数，但在上述 weight 系统下，是一个 s 次齐次 weight 多项式. 正是利用这一新的模型空间，我们能够把上述正规型问题转化为无穷个线性方程的求解问题，进而得到了 Bishop 不变量为 0 的 Bishop 曲面的形式正规型. 然后我们利用这一正规型，得到了 Moser 问题的一个否定答案. 在证明 $\lambda=0,\ s\neq\infty$ 时 Bishop 曲面与代数曲面间一般不双全纯等价的过程中，我们主要运用了 Baire 范畴定理，其思想本质上来自于 Poincaré[Po1907].

其次，在证明等价分类问题中，我们利用了 Moser-Webster [MW83] 的投影化思想，但与他们的方法不同的是，我们不再利用一对对合变换，我们的出发点是 Huang-Krantz 的平坦化定理，

由此构造了一簇贴于曲面上的圆盘，进而在 Bishop 不变量为 0、Moser 不变量为某个固定 s 的 Bishop 曲面上建立了曲面的双曲几何. 根据这些双曲几何性质，我们证明了两个 Bishop 不变量为 0、Moser 不变量为某个固定 s 的 Bishop 曲面双全纯等价当且仅当它们形式等价，从而给出了这一曲面的全纯等价分类问题. 在上述 Bishop 曲面上建立双曲几何并由此证明此类曲面的全纯等价分类问题，据我所知，以前从来没有出现过.

最后，我们把 Moser 的定理 [Mos85] 推广到了 $\mathbb{C}^{n+1}(n \geq 2)$ 中的一类余维数为 2 的 CR 奇异子流形上. 在给出了它的拟正规型后，还得到了拟正规型能平坦化的充要条件；这与一维情形 [Mos85] 有着本质的区别，因为在一维情形，曲面的拟正规型总可以平坦化. 在证明模型空间 $w = |z|^2$ 的自同构群时，我们利用贴于曲面上的圆盘，把上述自同构问题转化为单位球上的自同构问题. 最后在证明上述子流形能双全纯等价于一个二次曲面当且仅当它们形式等价时，如同 [Mos85] 中一样，我们主要运用了著名的 KAM 快速迭代法.

摘　要

多复变函数论是当今数学中一个非常重要的分支，这一学科由 Poincaré 、Hartogs、E. Levi 和 E. Cartan 等著名数学家在 20 世纪初创立，且其后一直备受关注. 在多复变的众多基本问题中，有一类重要的问题是实流形在复流形中的双全纯等价性. 在这一研究领域，由于包括 Cartan、Moser、Bishop、陈省身和 Webster 等一流数学家在内的许多人的共同努力，已经取得了相当大的进展；然而直到现在，这一领域仍有许多基本的问题没有解决.

本文是基于我和我的导师黄孝军教授分别在 2007 年 3 月和 2008 年 2 月合作完成的两篇文章 [HY07] 和 [HY08]. 我们主要研究了 Bishop 曲面在复空间中的双全纯等价问题. 本文的第一部分包括第二章和第三章，研究的是 $\mathbb{C}^2$ 中 Bishop 不变量为 0 的椭圆 Bishop 曲面，这一工作可以看成是 Moser-Webster 在 1983 年的著名工作 [MW83] 和其后 Moser 在 1985 年的著名工作 [Mos85] 的继续，我们解决了 Moser 在 1985 年的工作 [Mos85] 中提出的著名问题，这一部分来自于我和我的导师黄孝军教授合作的文章 [HY07]；论文的第二部分为第四章，我们把 Moser 的工作 [Mos85] 推广到高维的情形，利用 KAM 快速迭代法，证明了一个余维数为 2 的实解析子流形与一个对称模型双全纯等价当且仅当它们形式等价，这一部分内容来自于我和我的导师黄孝军教授合作的文章 [HY08].

具体说来，本文由下面四章组成：

在第一章中，介绍了多复变中的一些整体和局部双全纯等价问题，详细介绍了 Bishop 曲面研究的发展过程，直至最新的进展；然后介绍了 $\mathbb{C}^{n+1}(n \geq 2)$ 中复切点的 CR 维数大于或等于 2 的实子流形的最新发展状况；最后对本文的主要工作进行了综述.

在第二章中，引入了一个不同于以往的 weight 理论，这就使得我们可以成功地求解一个复杂的非线性方程，最终得到 Bishop 不变量为 0 的 Bishop 曲面的形式正规型，进而得到了此类曲面在形式变换群下的完全不变量. 特别地，我们证明了当 Bishop 不变量为 0、Moser 不变量为某个固定的 s 时，其模空间是一个无穷维 Frèchet 空间. 由此马上可以得到 Moser 问题的一个否定答案，即 Bishop 不变量为 0 时 Bishop 曲面不能被其 Taylor 展开的一个有限截断所决定. 结合 Poincaré [Po1907] 中的证明思想，我们得到 $\lambda=0$, $s\neq\infty$ 时 Bishop 曲面一般不能双全纯等价于一个代数曲面.

在第三章中，首先对所研究的曲面进行复化，利用 Moser-Webster [MW83] 的投影化思想和 Huang-Krantz [HK95] 中的平坦化定理，得到了一簇贴于曲面上的圆盘，从而建立了 Bishop 不变量为 0、Moser 不变量为某个固定 s 的 Bishop 曲面上的双曲几何. 接着我们证明了两个 Bishop 不变量为 0、Moser 不变量为某个固定 s 的 Bishop 曲面双全纯等价当且仅当它们的形式正规型经过一个旋转变换 $(z,w)\longmapsto(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z,w)$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta s}=1$ 后相同，从而解决了这一曲面的全纯等价分类问题. 最后我们研究了一类特殊 Bishop 曲面的一些等价性质.

在第四章中，我们研究了 Moser 定理的一个高维推广. 对于 $\mathbb{C}^{n+1}(n\geq 2)$ 中的一类余维数为 2 的奇异 CR 子流形，给出了它的拟正规型，同时得到了拟正规型能平坦化的充要条件. 然后运用著名的 KAM 快速迭代法，证明了如果这个子流形能双全纯等价于正规型中一个对称的二次曲面当且仅当它们形式等价.

关键字： Bishop 曲面，CR 奇异流形，消失的 Bishop 不变量，全纯等价，正规型

Abstract

Several complex variables is an important branch of modern mathematics. The subject started with the work of Poincaré, Hartogs, E. Levi, E. Cartan, and others at the beginning of the 20th century. Since then, it has attracted much attention. Among many fundamental problems in Several Complex Variables is the biholomorphic equivalence problem for real submanifolds in a complex manifold. Along these lines of research, much progress has been made due to the important work of many leading mathematicians of their time, that include at least E. Cartan, Moser, Bishop, Chern, Webster, etc. However, there are still many basic problems left unsolved.

This thesis, based on my two joint papers with my advisor Professor Xiaojun Huang completed in March 2007 [HY07] and February 2008 [HY08], will study the biholomorphic equivalent problem for Bishop submanifolds in a complex space.

The first part of this dissertation consists of Chapter two and Chapter three, which is to study the non-degenerate elliptic Bishop surfaces with a vanishing Bishop invariant in $\mathbb{C}^2$. Our work here can be viewed as the continuation of the celebrated work of Moser-Webster [MW83] in 1983 and the late famous work of Moser [Mos85] in 1985. Among many things, we will present a solution to a well-known problem of Moser. The mathematics in this part is taken from my joint paper with Professor Xiaojun Huang in [HY07].

The second part of the thesis is the fourth chapter, which is

to establish a result of Moser [Mos85] to higher dimensions. We will show that a real analytic submanifold of codimension two with a symmetric model is biholomorphic to the model if it is formally equivalent to the model, by applying the KAM theory. The mathematics in this part is taken from my joint paper with Professor Xiaojun Huang in [HY08].

More precisely, the dissertation is organized as follows:

In the first chapter, we discuss some global and local biholomorphic equivalent problems in several complex variables. We will give a through description of the history and new development of the research on the Bishop surfaces. Next we discuss the new development of the real submanifolds in $\mathbb{C}^{n+1}(n \geq 2)$ with the codimension at the complex tangent points greater than or equal to two.

In the second chapter, we derive a formal normal form for a Bishop surface near a vanishing Bishop invariant, by introducing a quite different weighting system. Next we obtain a complete set of invariants under the action of the formal transformation group. We show, in particular, that the modular space for Bishop surfaces with a vanishing Bishop invariant and with a fixed (finite) Moser invariant s is an infinitely dimensional manifold in a Frèchet space. This then immediately provides an answer, in the negative, to Moser's problem concerning the determination of a Bishop surface with a vanishing Bishop invariant from a finite truncation of its Taylor expansion. Furthermore, it can be combined with some ideas of Poincaré [Po1907] to show that most Bishop surfaces with $\lambda = 0,\ s \neq \infty$ are not holomorphically equivalent to algebraic surfaces.

In the third chapter, we discuss the complexification of the surface under consideration, by making use of the Moser-Webster [MW83] polarization and the Huang-Krantz [HK95] flatting theorem. We then obtain a family of holomorphic discs attached to the

surface. Starting with these discs, we introduce a new hyperbolic geometry. Based on the obtained geometry, we show that two Bishop surfaces with $\lambda = 0$ and $s < \infty$ are biholomorphically equivalent if and only if their formal normal forms are the same up to a trivial rotation of the form: $(z, w) \longmapsto (e^{i\theta} z, w)$ with $e^{i\theta s} = 1$. Hence, the formal normal form that we derive provides a solution to the equivalence problem also in the holomorphic category. At last we derived some equivalence properties of a family of Bishop surfaces.

In the fourth chapter, we generalize the work of Moser to the higher dimensional case. For a certain codimension two CR singular submanifold in $\mathbb{C}^{n+1} (n \geq 2)$, we first derive a pseudo-normal form for M near the origin, then use it to give a necessary and sufficient condition when $(M, 0)$ can be formally flattened. Finally we prove that $(M, 0)$ is holomorphically equivalent to the quadric $(M_\infty : w = |z|^2,\ 0)$ if and only if it can be formally transformed to $(M_\infty, 0)$ by using the famous KAM rapid iteration theorem.

Key words: Bishop surfaces, CR singular manifolds, Vanishing Bishop invariant, Holomorphic equivalence, Normal forms.



武汉大学优秀博士学位论文文库

已出版：

- 基于双耳线索的移动音频编码研究／陈水仙　著
- 多帧影像超分辨率复原重建关键技术研究／谢伟　著
- Copula函数理论在多变量水文分析计算中的应用研究／陈璐　著
- 大型地下洞室群地震响应与结构面控制型围岩稳定研究／张雨霆　著
- 迷走神经诱发心房颤动的电生理和离子通道基础研究／赵庆彦　著
- 心房颤动的自主神经机制研究／鲁志兵　著
- 氧化应激状态下维持黑素小体蛋白低免疫原性的分子机制研究／刘小明　著
- 实流形在复流形中的全纯不变量／尹万科　著
- MITA介导的细胞抗病毒反应信号转导及其调节机制／钟波　著
- 图书馆数字资源选择标准研究／唐琼　著
- 年龄结构变动与经济增长：理论模型与政策建议／李魁　著
- 积极一般预防理论研究／陈金林　著
- 海洋石油开发环境污染法律救济机制研究／高翔　著
  —— 以美国墨西哥湾漏油事故和我国渤海湾漏油事故为视角
- 中国共产党人政治忠诚观研究／徐霞　著
- 现代汉语属性名词语义特征研究／许艳平　著
- 论马克思的时间概念／熊进　著
- 晚明江南诗学研究／张清河　著

目　　录

第一章　综　　述

1.1　一些整体和局部等价问题的研究概况

在本文中，我们将研究一些带有 CR 奇性曲面的局部等价问题. 假设 M 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个子流形，p 是 M 中的一个点，我们定义 $\mathrm{CR}(p)$ 是 **M 在 p 点的 CR 维数**，也就是说，是 $T_p^{(0,1)}M$ 的复维数. p 被称为 **CR 点**，如果对于任意的 $q(\in M)\approx p$, 都有

$$\mathrm{CR}(q)=\mathrm{CR}(p);$$

否则，p 被称为 **CR 奇异点**. 在多复变函数论中，我们称两个芽 $(M,p),(M',p')$ **局部等价**，如果 p,p' 分别存在在 M,M' 中的一个邻域 U,U'，以及一个从 U 到 U' 的双全纯等价映射 F，满足

$$F(p)=p'.$$

研究这类问题，我们总是试图找到曲面在这一固定点的完全全纯不变量. 一般说来，曲面在 CR 点和 CR 奇异点的几何性质间存在很大的差异.

1. 一些整体等价和 CR 流形间的局部等价问题

Poincaré、Cartan 最先研究了 CR 流形间的局部等价问题. 早在 20 世纪初，Poincaré 在 [Po1907] 中证明了双圆盘与二维复球之间的不双全纯等价性，从而得到了与单复变函数论中的黎曼映照定理截然不同的现象，同时从一个侧面说明了多复变函数论中区域的整体等价问题的复杂性. 同时，他注意到 $\mathbb{C}^n(n\geq 2)$ 中区域的内部复结构与区域边界的复结构，即边界的 CR 结构紧密相关，这就启发我们试图通过研究区域边界 CR 结构的局部等价问题来研究部分

区域的整体等价问题. 事实上, C. Fefferman[Fe74] 和 Bochner (参见 [Ho73] 或 [Kr82]) 在他们著名的工作中, 证明了两个有界的光滑强拟凸域是双全纯等价的当且仅当它们的边界是 CR 等价的. 进一步, Pinchuk[Pi75] 和 Lewy[Le77] 证明了如果上述两个区域的边界是实解析的, 那么区域间的全纯等价映射可解析延拓到区域的一个邻域内, Webster 在 [Web77] 中则得到了相应的一个代数结果. 有许多进一步的事实证明了区域边界的 CR 性质在决定区域的双全纯等价性中扮演着非常重要的角色, 有兴趣的读者可参见 [CJ96], [HJ98], 或综述性文章 [BER00b], [IK99] 及它们后面的参考文献.

下面讨论双全纯等价问题中的局部理论. 首先, 对于 CR 流形中的一类重要曲面, 即 Levi 非退化的实解析超曲面情形, Chern-Moser 在著名的 [CM74] 一文中给出了这类曲面的正规型, 得到了它们的完全不变量 (早期的工作参见 [Ca32a], [Ca32b], [Ta62], [Ta67]). 在第二章和第四章中, 我们将把我们得到的正规型与 [CM74] 中的正规型进行类比, 事实上, 这些正规型间存在一些类似之处 (详见注 2.2.1和注 4.2.1 (1)). 因此在这里, 我们有必要简要叙述一下 Chern-Moser 理论.

假设 M 为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的一个 Levi 非退化的实解析超曲面, $p_0 \in M$. 经过一个双全纯变换, p_0 被映到 0 点, 且在坐标 $(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ 下, M 在 0 点附近可由下式定义:

$$\operatorname{Im}(w) = zBz^* + F\big(z, \bar{z}, \operatorname{Re}(w)\big), \tag{1.1.1}$$

这里 $()^*$ 表示 Hermit 转置, 即 $z^* = \bar{z}^t$, B 是一个对角矩阵且前面 p 个元为 1, 后面 $q = n - p$ 个元为 -1, $F\big(z, \bar{z}, \operatorname{Re}(w)\big)$ 是一个实解析的实值函数. 如果定义 $z, \bar{z}$ 的权均为 1, $\operatorname{Re}(w)$ 的权为 2, 那么在此权系统下, F 还满足 $F = O(3)$. 记 $\mathcal{F}$ 为所有满足上述性质的 F, 且把 $F \in \mathcal{F}$ 分解成 (k, l) 型, 即记

$$F(z, \bar{z}, s) = \sum_{k,l=0}^{\infty} F_{kl}(z, \bar{z}, s),$$

其中 F_{kl} 为 (k, l) 型, 即满足

$$F_{kl}(t_1 z, t_2 \bar{z}, s) = t_1^k t_2^l F_{kl}(z, \bar{z}, s), \quad t_1, t_2 > 0.$$

现在定义**缩并算子** tr:

$$\operatorname{tr} F_{kl} = \frac{1}{kl}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) B \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^* F_{kl}.$$

对于 $\mathcal{F}$ 中的函数 N，我们说 $N \in \mathcal{N}$, 如果

$$N(z,\bar{z},s) = \sum_{\min\{k,l\}\geq 2} N_{kl}(z,\bar{z},s), \tag{1.1.2}$$

$$且 \operatorname{tr} N_{22} = 0, \quad \operatorname{tr}^2 N_{32} = 0, \quad \operatorname{tr}^3 N_{33} = 0.$$

定义 $SU(p+1,q+1)$ 为幺模的 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵保持如下二次形式:

$$\langle \widetilde{t}, \widetilde{t'} \rangle := tBt^* + \frac{\mathrm{i}}{2}(t_{n+1}\overline{t_0} - t_0\overline{t'_{n+1}}),$$

其中 $\widetilde{t} = (t_0, t, t_{n+1})$, $\widetilde{t'} = (t'_0, t', t'_{n+1})$. 接着, 再定义 K 为 $SU(p+1,q+1)$ 中对角元均为 ϵ 且 $\epsilon^{n+2} = 1$ 的子群. 现在定义 G 为 $SU(p+1,q+1)/K$ 中保持 $\mathbb{C}P^{n+1}$ 上原点的最大子群. 我们称全纯变换 $T \in \mathcal{T}$，如果 $T = (z + \widetilde{f}, w + \widetilde{g})$，且 $\widetilde{f} = O(2)$, $\widetilde{G} = O(3)$, 以及

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial w}(0) = 0, \quad \operatorname{Re}\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial w^2}(0) = 0.$$

有了如上准备工作，Chern-Moser 定理可如下叙述:

假设 $M \in \mathbb{C}^{n+1}$ 为一个实解析的超曲面，它在 0 点附近由方程 (1.1.1) 定义. 那么对于任意的有理变换 $R \in G$，存在唯一的 $T \in \mathcal{T}$，使得通过双全纯变换 $H = T \circ R$，在新坐标 $(z', w') \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ 下，M 在 0 点附近由如下方程定义:

$$\operatorname{Im}(w') = z'Bz'^* + N\big(z', \bar{z}', \operatorname{Re}(w')\big), \tag{1.1.3}$$

其中 $N \in \mathcal{N}$.

2. Bishop 曲面上的研究概况

作为超曲面情形在一定意义下的一种推广，我们将在下文里研究 $\mathbb{C}^n$ 中具有高的余维数的实子流形. 这类曲面的最简单模型是嵌入在 $\mathbb{C}^2$ 中的实二维流形. 注意到，对于这样的流形 M，它在每一点的 CR 维数是 0 或 1，因此如果 M 是一个 CR 流形，那么 M 要么全实要么是 $\mathbb{C}^2$ 中的一条复曲线. 特别地，如果 M 是

$\mathbb{C}^2$ 中实解析 CR 流形，那么它双全纯等价于 $\mathbb{R}^2(\subset\mathbb{C}^2)$ 或复平面 $\{z_2=0\}(\subset\mathbb{C}^2)$. 因此，对于 $\mathbb{C}^2$ 中的实解析流形 M，从双全纯等价的观点来看，有意思的点是那些 $p(\in M)$，满足在 p 点的 CR 维数为 1，但在 p 点一个邻域的其他点 CR 维数为 0，这样的点被称为**复切点** (complex tangents). 对这类点的研究非常有意义: 首先，从复分析的难点来看，它们可以看成超曲面在具有高的余维数的一个最简单的类似; 其次，这类曲面在复切点具有丰富的复结构，而在其附近的其他点只有平凡的复结构，即这是具有 CR 奇性曲面的最简单模型; 另外，对于 $\mathbb{C}^2$ 中紧致可定向的实二维流形，这样的点总是存在的 (事实上，由 [Bis65]，我们知道椭圆点与双曲点的差为曲面的欧拉数).

如果曲面 M 在 p 点满足一定的非退化条件，Bishop 在 [Bis65] 一文中证明了存在全纯局部坐标 $(z,w=u+\mathrm{i}v)\subset\mathbb{C}^2$，在 p 点为 0，使得 M 为如下方程所定义:

$$w=z\overline{z}+\lambda(z^2+\overline{z}^2)+E(z,\bar{z}),\quad E(z,\bar{z})=o(|z|^2),\qquad(1.1.4)$$

这里 $0\le\lambda<\infty$，并且 λ 是一个全纯不变量，称为 **Bishop 不变量**. 一个曲面被称为 **Bishop 曲面**, 如果它在所有的复切点非退化. 我们称复切点是**椭圆的、抛物的、双曲的**, 如果 λ 分别满足

$$0\le\lambda<\frac{1}{2},\quad\lambda=\frac{1}{2},\quad\frac{1}{2}<\lambda<\infty.$$

这类问题的研究最早始于 Bishop. 他在 [Bis65] 一文中，运用 Picard 迭代法，证明存在一簇全纯圆盘，收缩到 p 点且贴于 M 上，从而发现了 M 在椭圆情形的复切点附近的许多重要几何性质. 这里全纯圆盘贴于 M 上意味着存在连续映射 $f:\overline{\Delta}\to\mathbb{C}^2$，它在 Δ 上全纯且满足 $f(\partial\Delta)\subset M$. 同时他提出了如下的尚未解决的问题: 如果考虑这些局部贴于 M 的圆盘的并集，我们是否有唯一性和正则性？这些圆盘的并集能否组成 M 的全纯凸域？

Bishop 不变量是一个二次不变量，带有这个曲面的许多基本几何性质. Moser-Webster 在他们著名的文章 [MW83] 中，首先研究了更微妙的高阶不变量. 与 Bishop 的方法不同的是，他们不再运用贴解析圆盘的方法，他们的出发点是一个动力学方向的对象，

即在这种非例外复切点的复化曲面附近，定义一对内在的对合变换 (involution)，这里 Bishop 不变量非例外是指 $\lambda \neq 0, \frac{1}{2}, \infty$ 并且 $\lambda v^2 - v + \lambda = 0$ 关于 v 没有单位根. Moser-Webster 在 [MW83] 一文中，把上述正规型问题转化为一对被一个反全纯对合变换缠绕的对合变换的正规化问题. 通过对这对对合变换进行正规化，他们证明了在一个非例外的复切点附近，M 可以通过一个形式幂级数变换，在坐标 $(z, w = u + \mathrm{i}v) \subset \mathbb{C}^2$ 下，有如下正规型：

$$u = z\overline{z} + (\lambda + \epsilon u^s)(z^2 + \overline{z}^2), \quad v = 0,$$
$$\epsilon \in \{0, 1, -1\},\ s \in \mathbb{Z}^+. \tag{1.1.5}$$

Moser-Webster 受天体力学中保面积变换的正规性问题 (参见 [MS71]) 研究的启发，运用强控制函数理论 (majorant argument)，得到了在非例外的椭圆情形，即 $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ 时，上述幂级数变换的收敛性. 在双曲情形，上述形式幂级数变换可能发散. 在 [MW83] 中，他们给出了一些简单的代数双曲面，它们形式等价但不能全纯等价于正规型 (1.1.5). 这方面进一步的工作参见 [Gon94a], [Gon04].

通过 Moser-Webster 的工作，我们立即可以得到: 如果 $M \subset \mathbb{C}^2$ 是一个实解析曲面，那么在非例外椭圆点 $p \in M$，存在由一个参数组成的一组实解析簇，它们是边界在 M 上 (即贴于 M) 的解析圆盘，互不相交且收敛到 p 点，这些圆盘的并 $\widetilde{M} \subset \mathbb{C}^2$ 组成一个 Levi 平坦的实解析三维带边流形，M 是它的部分边界且流形 $\widetilde{M}$ 正是 M 的局部全纯凸域.

遗憾的是，Moser-Webster 的方法对于例外的椭圆情形，即 $\lambda = 0$ 时不再适用. 事实上，此时我们不再有 [MW83] 中的对合变换. 与 [MW83] 不同的是，Moser 在 [Mos85] 一文中从形式幂级数的角度去考虑这个问题，得到了如下拟正规型：

$$w = z\overline{z} + z^s + \overline{z}^s + 2\mathrm{Re}\Big(\sum_{j \geq s+1} a_j z^j\Big), \tag{1.1.6}$$

这里 s 是 Bishop 不变量为 0 时，复切点最简单的高阶不变量，我们称之为 **Moser 不变量**. Moser 还证明了, 如果 $s = \infty$，那么 M 可全纯等价于二次曲面 $M_\infty = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w = |z|^2\}$. 同时，Moser 提出了这样一个很自然的问题：怎样从拟正规型中寻找除

s 以外的其他高阶不变量？注意到，Moser 在得到拟正规型的过程中，利用了一个非常复杂的无穷维变换群 $\mathrm{aut}_0(M_\infty)$, 即 M_∞ 到自身的形式变换群. 同时注意到，$\mathrm{aut}_0(M_\infty)$ 中包含许多不收敛的元素 (参见 [MW83], [Mos85], [Hu01]). 关于 Bishop 不变量为 0 的 Bishop 曲面，Moser 在 [Mos85] 中提出了如下两个基本的问题:

首先是关于贴于 M 上、收缩到 p 点的解析圆盘的解析性问题. 这个问题由 Huang-Krantz 在 [HK95] 中对解析流形的情形给出了肯定的答案. 因此，联系 Moser-Webster 的工作，我们有，如果只考虑曲面的全纯凸域的解析性质，椭圆情形有相同的现象. 对于由 (1.1.4) 定义的光滑曲面 $M \subset \mathbb{C}^2$，λ 仍然是 M 的一个全纯不变量. Kenig-Webster 在 [KW82] 一文中证明了, 如果 M 为光滑的椭圆复切点，那么存在唯一一簇由一个参数组成的一组边界在 M 上 (即贴于 M) 的解析圆盘，互不相交且收敛到 p 点，这些圆盘的并 $\widetilde{M} \subset \mathbb{C}^2$ 组成一个 Levi 平坦的光滑三维带边流形，M 是它的部分边界且流形 $\widetilde{M}$ 正是 M 的局部全纯凸域. 在 [MW83] 一文中，Moser-Webster 给出了 $\mathbb{C}^n$ 中 n 维解析实子流形在非例外椭圆复切点的正规型，这样其全纯凸包跟二维情形有相同的结论. $\mathbb{C}^n$ 中 n 维实子流形在非例外椭圆复切点的全纯凸包问题最终由 Huang 在 [Hu98] 一文中给出了一个完整的答案，其光滑性的讨论是基于 [KW84] 中的部分结果. 即有下述事实:

如果 $M \in \mathbb{C}^n (n \geq 2)$ 为一个光滑 n 维实子流形，$p \in M$ 为一个孤立椭圆点，那么存在一簇互不相交的贴于 M 上的解析圆盘，收敛到 p，它们的并 $\widetilde{M}$ 是一个光滑的 Levi 平坦的 $n+1$ 维带边流形，且为 M 在 p 点附近的局部全纯凸包，M 为它的部分边界. 进一步，如果 M 实解析，那么 $\widetilde{M}$ 也实解析.

Moser 提出的第二个问题是关于 $\lambda = 0$ 时 Bishop 曲面的高阶不变量. 注意到，Moser-Webster 的正规型，即具有非消失 Bishop 不变量的椭圆情形的解析 Bishop 曲面，全纯等价于一个代数曲面且最多有两个高阶不变量. 因此，Moser 提出 $\lambda = 0$ 时是否也具有如上 $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ 时同样的性质? 此时 Bishop 曲面的等价类是否被一个代数曲面所决定? 这个曲面能否由 Bishop 曲面定义函数足

够大项的截断函数所定义? Gong 在 [Gon94b] 一文中指出，在一个稍小的变换群的等价关系下，即双全纯辛变换群 (the group of holomorphic symplectic transformations) 下，$\lambda = 0$ 时 Bishop 曲面确实有无穷多个不变量. 然而在这种关系下，非例外椭圆情形的 Bishop 曲面同样也有无穷多个不变量. Gong 在后来的工作中还证明了，如果只考虑此动力学性质，例外或非例外双曲情形，或甚至于抛物情形，它们在复切点差别不大.

接着我们讨论 $\mathbb{C}^n$ 中带有 CR 奇性的实子流形，它在奇异点有较高 (即大于或等于 2) 的 CR 维数. 最近出现了许多关于这一方面的工作，有兴趣的读者可参见 [Sto], [DTZ05], [Cof06] 等. 特别地，在 [Sto] 一文中，Stolovitch 对一类非例外曲面，在一般的 CR 奇异点，引入了推广的 Bishop 不变量，并把 Moser-Webster [MW83] 的部分结果推广到 $\dim_{\mathbb{R}} M > \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^{n+1}$ 的情形. 在 [DTZ05] 一文中，Dolbeault-Tomassini-Zaitsev 引入了平坦的椭圆 CR 奇异点的概念. 对 $\mathbb{C}^n$ 中一类余维数为 2 且只有两个平坦的椭圆 CR 奇异点的紧子流形，他们研究了复解析子集 (complex analytic varieties) 的整体填补 (filling) 性质.

1.2 本文的主要工作

本文的工作本质上是 Moser 的著名工作 [Mos85] 的继续及其在高维的推广. 我们从 [Mos85] 的拟正规型中，通过形式幂级数变换，消去了部分特定项，得到了 Bishop 不变量为 0 的 Bishop 曲面的形式正规型. 特别地，证明了当 Bishop 不变量为 0、Moser 不变量为某个固定的 s 时，它的模空间是一个无穷维 Frèchet 空间. 由此我们马上可以得到 Moser 问题的一个否定答案，即 Bishop 不变量为 0 时 Bishop 曲面不能被其 Taylor 展开的一个有限截断所决定. 通过进一步的讨论，我们得到 $\lambda = 0$, $s \neq \infty$ 时 Bishop 曲面一般不能双全纯等价于一个代数曲面. 然后，我们建立了 Bishop 曲面上的双曲几何性质，并利用这些双曲几何性质证明了两个 Bishop 不变量为 0 的 Bishop 曲面双全纯等价当且仅当它们形式等价. 最后，

我们给出了 [Mos85] 在高维的一个推广定理. 具体表现在:

1. 具有消失 Bishop 不变量的 Bishop 曲面的形式理论

在第二章中，我们引入了一个不同于以往的 weight 理论，由此得到了 Bishop 曲面在 Bishop 不变量为 0 时的形式正规型. 即有如下的定理，从而得到了这类曲面的完全不变量.

定理 1.2.1 假设 M 是一个形式 Bishop 曲面，0 点为其椭圆复切点，它的 Bishop 不变量 λ 为 0 且 Moser 不变量 s 是一个有限的大于 2 的整数. 那么存在一个形式幂级数变换

$$(z',w')=F(z,w)=\big(\widetilde{f}(z,w),\widetilde{g}(z,w)\big),\quad F(0,0)=(0,0),$$

使得在 (z',w') 坐标下，$M'=F(M)$ 在 0 点附近由如下形式正规型所定义:

$$w'=z'\overline{z'}+z'^s+\overline{z'}^s+\varphi(z')+\overline{\varphi(z')},\tag{1.2.1}$$

这里

$$\varphi(z')=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{s-1}a_{ks+j}z'^{ks+j}.\tag{1.2.2}$$

这样一个形式变换在从左边复合如下一个旋转映射范围内唯一:

$$z''=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z',\ w''=w',\quad \text{其中 } \theta \text{ 是一个满足 } \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\theta}=1 \text{ 的常数}.$$

即如果存在另一个形式等价映射 $(z'',w'')=F^*(z,w)$，使得 $F^*(0)=0$ 且 M 被映到如下正规型:

$$w''=z''\overline{z''}+z''^s+\overline{z''}^s+\varphi'(z'')+\overline{\varphi'(z'')},$$

其中

$$\varphi'(z'')=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{s-1}a'_{ks+j}z''^{ks+j},$$

那么 $F^*=R_\theta\circ F$，其中 θ 是一个满足 $\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta s}=1$ 和 $a_{ks+j}=\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta j}a'_{ks+j}$ 的常数.

在这里，简要介绍一下定理 1.2.1 的证明思想. 对于定理 1.2.1 中的流形 M，我们希望找到一个幂级数变换把它变换到正规型

(1.2.1), (1.2.2)，并证明这一变换在除去一个旋转后唯一，这就要求我们研究一个无穷维的齐次方程组. 因为 $\mathrm{aut}_0(M_\infty)$ 是一个无穷维空间，齐次线性化方程有非平凡的核空间. 低次项解的系数将在高次方程中决定，然而在高次项决定的方程中，低次项的系数不再是线性的. 因此，这与 [CM74] 和 [Mos85] 中的情形很不一样. 我们克服这一障碍的思想是, 考虑如下新的模型空间:

$$w = |z|^2 + z^s + \overline{z^s}$$

而不再是二次曲面 $w = |z|^2$. 这样自同构群就变成了平凡群 $\mathcal{Z}_s$，这里 $\mathcal{Z}_s$ 是所有映射 $\{\psi_\theta : (z, w) \mapsto (e^{i\theta} z, w),\ e^{is\theta} = 1\}$ 组成的变换群. 注意到，此时 $|z|^2 + z^s$ 不再是一个齐次函数，然而, 如果我们对 z 赋予 weight 1、$\bar{z}$ 赋予 weight $s-1$，那么它就变成了一个 s 次齐次 weight 多项式. 在这一新的 weight 系统下，正规型问题就转化成了一个无穷维线性方程组的求解问题. 具体说来，degree 为 $2t+1$ 的项可以用来决定齐次方程中 degree 为 $ts+1$ 的项，degree 为 $2t+2$ 的项则决定了齐次方程中 degree 为 $ts+s$ 的项. 这样就可以成功得到定理 1.2.1 中具有消失的 Bishop 不变量的 Bishop 曲面的形式正规型.

下面给出定理 1.2.1 的一些直接的推论.

推论 1.2.1 (a) 假设 M_{nor} 是一个形式 Bishop 曲面，在 0 点附近由如下函数所定义:

$$w = z\bar{z} + z^s + \bar{z}^s + 2\mathrm{Re}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{s-1} a_{ks+j} z^{ks+j}\Big).$$

那么保持 0 点不变且把 M_{nor} 形式变换到自身的映射是 $\mathcal{Z}_s$ 的一个子群，记为 $\mathrm{aut}_0(M_{\mathrm{nor}})$. 进一步，$\psi_\theta \in \mathrm{aut}_0(M_{\mathrm{nor}})$ 当且仅当 $a_{ks+j} = 0$ 对任意的 k 和 j 满足 $k \geq 1$, $2 \leq j \leq s-1$, $e^{\sqrt{-1}j\theta} \neq 1$.

(b) $\mathrm{aut}_0(M_s) = \mathcal{Z}_s$, 这里 M_s 由方程 $w = z\bar{z} + z^s + \bar{z}^s$ 定义.

(c) $\mathcal{Z}_s$ 的任意子群都是某个 M_{nor} 到自身的变换群.

(d) 假设 M 是一个形式 Bishop 曲面，它在 0 点的 Bishop 不变量为 0 且 Moser 不变量 $s < \infty$. 那么 $\mathrm{aut}_0(M)$ 同构于 $\mathcal{Z}_s$ 的一个子群.

定理 1.2.2 *几乎所有 (generic) 满足 Bishop 不变量 λ 为 0 且 Moser 不变量有限的实解析 Bishop 曲面不能全纯等价于 $\mathbb{C}^2$ 中的一个代数曲面.*

对于定理 1.2.2，其证明思想最初来自于 Poincaré. 他在 [Po1907] 中证明了对于无穷维模空间的一个子集，如果它由一个有限维子空间的可数并组成，那么它必为一个第一范畴集 (the first category). 在 CR 几何范畴内，有兴趣的读者可参见 [Fo04]，在此文中，Forstneric 利用几乎所有的 CR 流形的模空间的维数是无穷的，证明了能全纯等价于代数流形的实解析 CR 流形，相对于所有实解析的 CR 流形，是一个薄集 (thin set). 正如 Forstneric 在 [Fo04] 中的工作，我们在证明所有 $\lambda=0$ 的 Bishop 曲面与代数曲面间的一般不全纯等价性时，主要利用了 Baire 范畴定理.

2. 具有消失 Bishop 不变量的 Bishop 曲面上的双曲几何和等价分类问题

对于第二章得到的正规型，我们还不清楚它是否一定收敛. 然而，我们将在第三章中证明, 如果正规型收敛且 Moser 不变量 $<\infty$，那么把曲面变换到正规型的映射一定收敛. 即有如下定理：

定理 1.2.3 *假设 M 和 M' 都是 0 点附近的实解析 Bishop 曲面，它们的 Bishop 不变量 λ 为 0 且 Moser 不变量有限. 如果 $F:(M,0)\longrightarrow(M',0)$ 是一个形式等价映射，那么 F 是 0 点附近的一个双全纯等价映射.*

我们的收敛性证明利用了 Moser-Webster [MW83] 投影化技巧，正如他们处理非例外 Bishop 曲面时所用到的. 然而，不同于 Moser-Webster 的情形，我们不再利用一对对合变换，这可是 Moser-Webster 理论的出发点. 我们处理收敛问题的主要思想是去建立曲面内在的双曲几何，其出发点是 Huang-Krantz [HK95] 的平坦化定理. 前面已经提到，存在许多不收敛的映射把 $\lambda=0$, $s=\infty$ 的曲面变换到如上定义的模型空间 M_∞. 因此我们的收敛性定理说

明 Moser 不变量在研究 $\lambda=0$ 的 Bishop 曲面中扮演着非常重要的角色. 同时注意到，还有许多其他考虑形式级数收敛的问题，比如说 Baouendi-Ebenfelt-Rothschild 的工作 [BER00a] 以及 [MBR02], [MMZ03], Webster [Web03], Stolovitch [Sto]，虽然在不同的情况下证明的思想方法完全不一样. 在 [BER00a], [MBR02], [MMZ03] 这些工作中，他们证明了不是太退化 (not too degenerate) 的实解析流形间的形式 CR 映射的收敛性问题. 在 [Web03], [Sto] 中，他们利用对合变换，证明了其他类型的正规型收敛性问题.

利用定理 1.2.1 和定理 1.2.3，我们有以下的推论:

推论 1.2.2 (a) 假设 M 是一个实解析的 Bishop 曲面，它在 0 点的 Bishop 不变量为 0 且 Moser 不变量 $s<\infty$. 如果 $\mathrm{aut}_0(M)=\mathbb{Z}_s$，那么 $(M,0)$ 双全纯等价于 $(M_s,0)$，这里 M_s 跟前面一样，由方程 $w=z\overline{z}+z^s+\overline{z}^s$ 所定义.

(b) 假设 M 是一个实解析的 Bishop 曲面，它在 0 点的 Bishop 不变量为 0 且 Moser 不变量 s 是一个素数. 那么 $\mathrm{aut}_0(M)$ 是一个平凡群, 如果 $(M,0)$ 不双全纯等价于 $(M_s,0)$.

定理 1.2.4 假设 M_1 和 M_2 都是 0 点附近的实解析 Bishop 曲面，它们的 Bishop 不变量 λ 为 0 且 Moser 不变量有限. 如果 M_1 有如下正规型:

$$w'=z'\overline{z'}+z'^s+\overline{z'}^s+2\mathrm{Re}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{s-1}a_{ks+j}z'^{ks+j}\Big),$$

并且 M_2 有如下正规型:

$$w'=z'\overline{z'}+z'^s+\overline{z'}^s+2\mathrm{Re}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{s-1}b_{ks+j}z'^{ks+j}\Big),$$

那么 $(M_1,0)$ 双全纯等价于 $(M_2,0)$ 当且仅当存在一个常数 θ 满足 $\mathrm{e}^{s\theta\sqrt{-1}}=1$，使得 $a_{ks+j}=\mathrm{e}^{\theta j\sqrt{-1}}b_{ks+j}$ 对任意的 $k\geq 1$ 和 $j=2,\cdots,s-1$.

定理 1.2.4 给出了 Bishop 不变量 λ 为 0 且 Moser 不变量 s 有限的 Bishop 曲面的全纯等价分类.

3. 一类余维数为 2 且形式等价于一个二次曲面的 CR 奇异流形

在第四章里，我们研究一类流形 M 定义在 CR 奇性点 p 附近的局部全纯结构，这类流形能够经过一个局部的全纯坐标变换，使得在新的坐标系统下，$p=0$ 并且 M 在 p 点附近由方程 $w=|z|^2+O(|z|^3)$ 定义. 这里用 $(z,w)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}$ 来表示 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的坐标. 首先，将得到 M 在 p 点的拟正规型. 我们发现 M 在 p 的全纯结构不但受 p 点 CR 奇性的影响，而且也被 (M,p) 中在 $n>1$ 时继承的部分强拟凸 CR 结构所影响. 这一点不同于 $n=1$ 时的情形 (参见 [mos85]). 遗憾的是，正如 Moser 在 [Mos85] 中所考虑的 $n=1$ 时的情形，我们的拟正规型需要利用复杂的无穷维群 $\mathrm{aut}_0(M_\infty)$, 即 M_∞ 到自身的形式变换群，这里 M_∞ 由 $w=|z|^2$ 定义. 因此，利用我们的拟正规型来解决局部等价问题并不是一件容易的事情. 然而，利用快速迭代法 (rapid iteration procedure) 将证明，如果我们的正规型中高阶项消失，那么 M 就双全纯等价于模型空间 M_∞. 即有如下定理：

定理 1.2.5 假设 $M\subset\mathbb{C}^{n+1}(n\geq 1)$ 是一个实解析的子流形，由如下形式的方程所定义：$w=|z|^2+O(|z|^3)$. 那么 $(M,0)$ 双全纯等价于二次型 $(M_\infty,0)$ 当且仅当它可以形式等价于 $(M_\infty,0)$.

定理 1.2.5 在 $n=1$ 时的情形即是 Moser 在 [Mos85] 中的工作. 事实上，我们的证明方法，如同 Moser 在 [Mos85]、Gong 在 [Gon94b] 中一样，主要利用了快速迭代法. 定理 1.2.5 中的收敛性结果在其他类型的 CR 奇点附近可参见 Gong [Gon94a] 和 Stolovitch [Sto].

上述定理与 $n=1$ 时的一个基本区别，在于几乎所有的 (M,p) 不能如 $n=1$ 时的情形那样，形式变换到 Levi 平坦的超曲面 $\mathrm{Im}(w)=0$. 事实上，我们利用定理 4.2.1中拟正规型，得到 $(M,0)$ 能形式平坦化的下述充分必要条件. 下面定理中的部分术语将在第四章中具体定义.

定理 1.2.6 假设 $(M,0)$ 是一个由形如 $w=|z|^2+E(z,\overline{z})$ 且 $E=O(|z|^3)$ 的形式方程定义的形式子流形，那么下面的命题等价:

(i) $(M,0)$ 能被平坦化;

(ii) $(M,0)$ 有一个平坦拟正规型. 即 M 有一个由如下形式定义的拟正规型: $w'=|z'|^2+\varphi(z',\overline{z'})$，且 φ 满足 (4.2.9) 中的正规性条件以及实值条件 $\varphi(z',\overline{z'})=\overline{\varphi(z',\overline{z'})}$;

(iii) $(M,0)$ 的任意拟正规型都是平坦的.

第二章　具有消失 Bishop 不变量的 Bishop 曲面的形式理论

在这一章里，我们考虑 Bishop 不变量为 0、Moser 不变量有限的 Bishop 曲面的形式理论，最终得到上述 Bishop 曲面的形式正规型. 特别地，通过上述形式正规型，我们证明了当 Bishop 不变量为 0、Moser 不变量为某个固定的 s 时，其模空间是一个 Frèchet 空间无穷维流形. 由此马上可以得到 Moser 问题的一个否定答案，即 Bishop 不变量为 0 时 Bishop 曲面不能被其 Taylor 展开的一个有限截断所决定. 通过进一步的讨论，我们得到 $\lambda = 0$, $s \neq \infty$ 时 Bishop 曲面一般不能双全纯等价于一个代数曲面.

2.1　近似正规型间形式映射的唯一性

在这一章里，我们用 (z, w) 或 (z', w') 来表示 $\mathbb{C}^2$ 中的坐标. 假设 $A(z, \overline{z})$ 是没有常数项的关于变量 $(z, \overline{z})$ 的形式幂级数. 我们说 $A(z, \overline{z})$ 的 order 是 k，如果

$$A(z, \overline{z}) = \sum_{j+l=k} A_{j\bar{l}} z^j \overline{z}^l + o(|z|^k),$$

并且至少存在一个 $A_{j\bar{l}} \in \mathbb{C}$ $(j + l = k)$ 不等于 0. 这时，称

$$\mathrm{Ord}\big(A(z, \overline{z})\big) = k.$$

我们称 $\mathrm{Ord}\big(A(z, \overline{z})\big) \geq k$, 如果 $A(z, \overline{z}) = O(|z|^k)$. 当 $A \equiv 0$ 时，定义 A 的 order 为 ∞.

考虑 $\mathbb{C}^2$ 中定义在原点附近形式实曲面 M. 假设 0 是 M 的一个复切点. 那么，通过一个线性坐标变换，可以假定 $T_0^{(1,0)}M=\{w=0\}$. 如果不存在坐标变换，使得 M 在 0 点附近由如下形式的方程所定义：$w=O(|z|^3)$，那么称 0 是 M 上的一个**非例外的复切点**. 在这种情况下，Bishop 证明了存在一个坐标变换，使得 M 在坐标变换后由如下方程所定义 (参见 [Bis65], [Hu04])：

$$w=z\overline{z}+\lambda(z^2+\overline{z}^2)+O(|z|^3), \tag{2.1.1}$$

这里 $\lambda\in[0,\infty]$，并且当 $\lambda=\infty$ 时，方程有如下形式:

$$w=z^2+\overline{z}^2+O(|z|^3).$$

λ 是 M 在 0 点的第一个绝对不变量，称为 **Bishop 不变量**. Bishop 不变量是一个二次不变量，类似于超曲面情形的 Levi 特征根. 当 $\lambda\in[0,\frac{1}{2})$ 时，称 M 为**椭圆的复切点**. 在这一章里，我们只对椭圆的复切点感兴趣，事实上，我们只研究 $\lambda=0$ 的情况；因为对于 $\lambda\in(0,\frac{1}{2})$ 的情况，曲面已经被 Moser-Webster [MW] 的工作所完全解决. 当 $\lambda=0$ 时，Moser-Webster 和 Moser 分别在 [MW], [Mos] 中证明了存在一个 $3\le s\le\infty$ 使 M 由如下方程所定义：

$$w=z\bar{z}+z^s+\bar{z}^s+E(z,\bar{z}), \tag{2.1.2}$$

这里 E 是一个关于 $(z,\bar{z})$ 的形式幂级数，且 $\mathrm{Ord}(E)\ge s+1$. 当 $s=\infty$ 时，应该理解定义方程为 $w=z\bar{z}$，即 M 形式等价于二次曲面 $M_\infty=\{w=z\bar{z}\}$. s 是 M 的另外一个绝对不变量, 我们称之为 **Moser 不变量**. $s=\infty$ 的情形由 Moser 的工作 [Mos85] 所解决. 因此，在本章的下文中，我们的曲面 M 都满足 $\lambda=0$ 和一个固定的 $s<\infty$.

一个不含有常数项的形式映射 $z'=F(z,w)$, $w'=G(z,w)$ 被称为一个**可逆的形式变换** (或者为简单起见，一个形式变换)，如果 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,w)}(0,0)$ 是可逆的. 当一个形式映射不含有常数项时，称它**保原点**.

首先，有如下基本引理.

引理 2.1.1　设 M 由方程 (2.1.2) 定义. 假设 $z'=F(z,w)$, $w'=G(z,w)$ 是一个保原点的形式变换并且把 M 映到 M'，这里

M' 由方程 $w' = z'\overline{z}' + z'^s + \overline{z'^s} + E^*(z', \overline{z'})$ 所定义，且 $\mathrm{Ord}(E^*) \geq s+1$. 那么

(i) $F = az + bw + O(|(z,w)|^2)$, $G = cw + O(|w|^2 + |zw| + |z|^3)$, 这里 $c = |a|^2$, $a \neq 0$;

(ii) 假设 M 和 M' 进一步由如下方程: $w = E(z, \overline{z}) = z\overline{z} + z^s + \overline{z}^s + o(|z|^s)$ 和 $w' = E^*(z', \overline{z'}) = z'\overline{z'} + z'^s + \overline{z'}^s + o(|z'|^s)$ 分别定义，这里 $s \geq 3$，那么

$$F = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z + O(|z|^2 + |w|), w + O(|w|^2 + |zw| + |z|^3)\right),$$

这里 θ 是一个满足 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\theta} = 1$ 的常数;

(iii) 在 (i) 里，对任意的 $N \geq s$，当 $\overline{E(z, \overline{z})} = E(z, \overline{z}) + o(|z|^N)$ 且 $\overline{E^*(z', \overline{z}')} = E^*(z', \overline{z}') + o(|z|^N)$ 时，有

$$G(z,w) = \sum_{2 \leq j \leq [N/2]} a_j w^j + \sum_{j+2k \geq N+1} b_{jk} z^j w^k,$$

其中 $\overline{a_j} = a_j$，且当 $N = 3$ 时，定义 $a_j = 0$.

证 (i) 是 [Hu04] 中引理 3.2 的内容. 为方便读者，我们简要叙述一下证明过程. 首先，假设 $F = (f, g)$ 满足

$$f = az + bw + O(|(z,w)|^2),$$
$$g = cw + d^{(2)}(z) + O(|w|^2 + |zw| + |z|^3).$$

利用 M' 的定义方程，有

$$cz\bar{z} + d^{(2)}(z) = |az + bw|^2 + O(|z|^3),$$

这里 $(z,w) \in M$. 比较 $z^2, z\bar{z}$ 的系数，得到

$$c = |a|^2, \quad d^{(2)} = 0.$$

为证明 (ii)，令 $F = (az + f, cw + g)$. 这里由 (i)，可以假设

$$f(z,w) = O(|z|^2 + |w|), \quad g(z,w) = O(|w|^2 + |zw| + |z|^3).$$

注意到

$$f(0, E(0, \bar{z})) = O(\bar{z}^s),$$
$$\overline{f}(\bar{z}, \bar{E}(\bar{z}, 0)) = O(\bar{z}^2),$$
$$g(0, E(0, \bar{z})) = o(\bar{z}^s).$$

运用 M' 的定义函数，知在 M 上有下述方程成立:

$$\begin{aligned}cw+g(z,w)=&|a|^2|z|^2+\bar{a}\bar{z}f(z,w)+az\overline{f}(\bar{z},\bar{w})+f(z,w)\overline{f}(\bar{z},\bar{w})\\&+(az+f(z,w))^s+\left(\bar{a}\bar{z}+\overline{f}(\bar{z},\bar{w})\right)^s+o(|z|^s).\end{aligned}$$

在上述方程中把 z 和 $\bar{z}$ 看成相互独立的变量，然后令 $z=0$, $w=E(0,\bar{z})$, $\bar{w}=\bar{E}(\bar{z},0)$, 我们得到

$$c\bar{z}^s+o(\bar{z}^s)=(\bar{a}\bar{z})^s+o(\bar{z}^s).$$

因此可以得到 $c=\bar{a}^s$. 注意到已经有 $c=|a|^2$ 和 $s\geq 3$，可以推得 $c=1$, $a=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，这里 θ 是一个常数.

现在转到 (iii) 的证明. 注意到

$$G(z,w)=\left|F(z,w)\right|^2+E^*\left(F(z,w),\overline{F(z,w)}\right),\quad 对于\ (z,w)\in M.$$

因为 E,E^* 直到次数 N 均为实值的形式幂级数，所以

$$G(z,w)=\overline{G(z,w)}+o(|z|^N)\ 于\ M\ 上成立.$$

记

$$G(z,w)=\sum_{\alpha,\beta}^{\infty}a_{\alpha\beta}z^\alpha w^\beta.$$

若 $\alpha+2\beta\leq N$，将用归纳法证明当 $\alpha=0$ 时 $a_{\alpha\beta}=\overline{a_{\alpha\beta}}$，否则 $a_{\alpha\beta}=0$. 首先，对任意的正整数 m，记 $E=E_{(m)}(z,\overline{z})+E_m$，其中 $E_{(m)}(z,\overline{z})$ 是一个次数至多为 $m-1$ 的多项式且 $E_m=O(|z|^m)$. 由假设 $E_{(N+1)}(z,\overline{z})$ 为实值函数，则有

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta=0}^{N}a_{\alpha\beta}z^\alpha w^\beta&=\sum_{\alpha,\beta=0}^{N}\overline{a_{\alpha\beta}z^\alpha}w^\beta+o(|z|^N),\\w&=z\overline{z}+z^s+\overline{z^s}+E_{(N+1)}(z,\overline{z}).\end{aligned}\tag{2.1.3}$$

接着，假设 $N_0=\alpha_0+2\beta_0$ 是最小的整数，使得 $a_{\alpha\beta}$ 在 $\alpha=0$ 时取实值且当 $\alpha+2\beta<N_0$ 时总是取 0. 如果 $N_0\geq N+1$ ，那么引理 2.1.1 自动成立，因此假设 $N_0\leq N$. 对于 $0<r\ll 1$, 定义 $\sigma_N(\xi,r)$ 是一个从单位圆盘到如下定义的单连通区域的双全纯映射:

$$\{\xi\in\mathbb{C}:|\xi|^2+r^{-2}\{r^s\xi^s+r^s\overline{\xi^s}+E_{(N+1)}(r\xi,r\overline{\xi})\}<1\},$$

满足 $\sigma_N(\xi,r)=\xi\big(1+O(r)\big)$. 因为圆盘 $\xi\longmapsto\left(r\sigma_N(\xi,r),r^2\right)$ 贴于由方程 $w=z\overline{z}+z^s+\overline{z^s}+E_{(N+1)}(z,\overline{z})$ 定义的曲面 M_{N+1} 上，所以

$$\sum_{\alpha+2\beta=N_0}a_{\alpha\beta}r^{N_0}\xi^\alpha=\sum_{\alpha+2\beta=N_0}\overline{a_{\alpha\beta}\xi^\alpha}r^{N_0}+o(r^{N_0}),\quad |\xi|=1.\tag{2.1.4}$$

两边同除以 r^{N_0} 后再让 $r\to 0$，得到

$$\sum_{\alpha+2\beta=N_0} a_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}=\sum_{\alpha+2\beta=N_0}\overline{a_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}},\quad |\xi|=1, \tag{2.1.5}$$

从上面这个方程，我们有当 $\alpha+2\beta=N_0$ 时，$a_{\alpha\beta}$ 在 $\alpha=0$ 时为实数，否则为 0. 这与 N_0 的选取矛盾，这样就完成了引理 2.1.1 (iii) 的证明. ■

这节的主要目标是证明如下近似正规型曲面间映射的唯一性：

定理 2.1.1 假设形式幂级数映射

$$\begin{cases} z'=z+f(z,w), & f(z,w)=O(|w|+|z|^2),\\ w'=w+g(w), & g(w)=O(|w|^2) \end{cases} \tag{2.1.6}$$

把由如下定义的曲面 M:

$$w=z\bar{z}+2\mathrm{Re}\left(z^s+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{s-1}a_{ks+j}z^{ks+j}\right)+E_1(z,\overline{z})$$

映射到由下述方程定义的曲面:

$$w'=z'\overline{z'}+2\mathrm{Re}\left(z'^s+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{s-1}b_{ks+j}z'^{ks+j}\right)+E_2(z',\overline{z'}),$$

其中 $n\geq 1$，a_{ks+j},b_{ks+j} 是复数，且

$$E_1(z,\overline{z})=o(|z|^{ns+s-1}),\quad E_2(z,\overline{z})=o(|z|^{ns+s-1}).$$

那么当 $t\in\mathbb{R}\to 0$ 时，

$$f(tz,t^2w)=O(t^{2n+1}),\quad g(t^2w)=O(t^{2n+2}),$$

并且 $a_{ks+j}=b_{ks+j}$ 对所有的 $k\leq n$ 和 $j=2,\cdots,s-1$ 成立.

我们证明定理 2.1.1 的其中一个主要思想是，对 $\overline{z}$ 定义一个不同于 z 的 weight. 更具体说来，定义 z 的 weight 为 1，$\overline{z}$ 的 weight 为 $s-1$. 对于一个不含有常数项的形式幂级数 $A(z,\overline{z})$，分别称 $wt(A(z,\overline{z}))=k$ 和 $wt(A(z,\overline{z}))\geq k$，如果它们分别满足当 $t\in\mathbb{R}\to 0$ 时，有

$$A(tz,t^{s-1}\overline{z})=t^kA(z,\overline{z}) \text{ 和 } A(tz,t^{s-1}\overline{z})=O(t^k).$$

在本章的下文中，我们用 Θ_l^j 来记 z 和 $\overline{z}$ 的形式幂级数，满足 order 至少为 j 且 weight 至少为 l (即当 $t\to 0$ 时，$\Theta_l^j(tz,t\overline{z})=$

$O(t^j)$ 且 $\Theta_l^j(tz, t^{s-1}\bar{z}) = O(t^l)$). 用 $\mathbb{P}_l^j$ 表示 z 和 $\bar{z}$ 的齐次多项式，满足 order 恰为 j 且 weight 至少为 l. 我们要强调的是，Θ_l^j 和 $\mathbb{P}_l^j$ 在不同的上下文中可能不同.

在下文中，同样定义 z, w 的正常 weight 分别是 1, 2. 对于一个形式幂级数 $h(z, w, \bar{z}, \bar{w})$，用 $wt_{\text{nor}}(h) \ge k$ 来表示下述消失性质：当 $t \to 0$ 时，$h(tz, t^2 w, t\bar{z}, t^2\bar{w}) = O(t^k)$. 假定 $h(z, w)$ 是一个以 (z, w) 为变量的不含常数项的形式幂级数，那么有如下形式展开：

$$h(z, w) = \sum_{l=1}^{\infty} h_{\text{nor}}^{(l)}(z, w),$$

其中

$$h_{\text{nor}}^{(l)}(tz, t^2 w) = t^l h_{\text{nor}}^{(l)}(z, w)$$

是 (z, w) 的一个多项式. 注意到 $h_{\text{nor}}^{(l)}(z, w)$ ，在标准的 weight 系统下 (即 z 和 w 的 weight 分别是 1 和 2)，是一个 degree 为 l 的齐次多项式. 接下来，我们总是记

$$h_l(z, w) = \sum_{j=l}^{\infty} h_{\text{nor}}^{(j)}(z, w) \quad 和 \quad h_{(l)} = \sum_{j=1}^{l-1} h_{\text{nor}}^{(j)}(z, w). \tag{2.1.7}$$

定理 2.1.1 的证明　除了要证明 $a_{ks+j} = b_{ks+j}$ 外，还需要证明在定理中的正规条件下，下述方程的任意解 (f, g) 满足 $wt_{\text{nor}}\big(f(z, w)\big) \ge 2n + 1$，$wt_{\text{nor}}\big(g(w)\big) \ge 2n + 2$：

$$\begin{aligned} w + g(w) =& \big(z + f(z, w)\big)\big(\bar{z} + \overline{f(z, w)}\big) + 2\mathrm{Re}\Bigg[\big(z + f(z, w)\big)^s \\ & + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{s-1} b_{ks+j}\big(z + f(z, w)\big)^{ks+j}\Bigg] \\ & + E_2\big(f(z, w), \overline{f(z, w)}\big), \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

其中 $w = z\bar{z} + z^s + \bar{z}^s + E(z, \bar{z})$，且

$$E = 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{s-1} a_{ks+j} z^{ks+j}\right) + E_1(z, \bar{z}).$$

将上述方程简化，可以得到方程 (2.1.8) 有如下形式:

$$
\begin{aligned}
g(w) =& \bar{z} f(z,w) + z\overline{f(z,w)} + \left|f(z,w)\right|^2 + 2\mathrm{Re}\Big\{ \big(z + f(z,w)\big)^s - z^s \\
& + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{s-1}\Big[b_{ks+j}\big(z+f(z,w)\big)^{ks+j} - a_{ks+j} z^{ks+j} \Big] \Big\} \\
& + o\big(|z|^{ns+s-1}\big).
\end{aligned}
\tag{2.1.9}
$$

在定理 2.1.1的证明中，我们有下面的约定：当 $N = ks + j$ 且 $k \le n$, $2 \le j \le s-1$ 时，定义 a_N 和 b_N 即为定理 2.1.1中对应的值；否则定义为 0. 在这节的下文中，将如下定义正整数 N_0:

假设存在一对正整数 (j_0, k_0) 使得 $(s <)k_0 s + j_0 (\le ns + s - 1)$ 是满足 $a_{k_0 s+j_0} \ne b_{k_0 s+j_0}$ 的最小正整数，那么定义 $N_0 = k_0 s + j_0$，否则定义 $N_0 = sn + s$.

根据 f 的消失阶 (vanishing order) 为奇或为偶，我们把定理 2.1.1 的证明分成如下的两个部分.

定理 2.1.1 证明的第一部分 在这一部分里，假定要么

$$\mathrm{Ord}\,(f(z, w(z,\bar{z})) = 2t$$

是偶数，要么 $f \equiv 0$，其中 $w(z,\bar{z}) = z\bar{z} + z^s + \bar{z}^s + E(z,\bar{z})$，并记

$$g(w) = c_l w^l + o(w^l).$$

定义

$$\widehat{N_0} = \min\{N_0, \mathrm{Ord}(f), sn + s - 1\}.$$

如果 $f \equiv 0$，则定义 $\mathrm{Ord}(f) = \infty$. 那么由 (2.1.9) 可得

$$c_l z^l \bar{z}^l + O\big(|z|^{2l+1}\big) = 2\mathrm{Re}\big[(b_{N_0} - a_{N_0}) z^{N_0}\big] + O\big(|z|^{\widehat{N_0}+1}\big). \tag{2.1.10}$$

注意到上式左边为混合项，右边为调和项，因此能够很容易地得到如下结论:

(2.I) 假设 $2t \ge N_0$ 且 $c_l \ne 0$. 那么 $2l > \min\{N_0, sn+s-1\}$ 且 $b_{N_0} = a_{N_0}$. 由我们对 N_0 的选取，N_0 必须是 $ns + s$. 因此，定理在这种情形下很容易得到. 当 $2t \ge N_0$ 且 $\mathrm{Ord}(g) = \infty$ 时同理可得.

(2.II) 当 $2t < N_0$ 时，如果 $c_l \neq 0$，则 $2l \geq \min\{2t+2, sn+s\}$. 因此要么 $\mathrm{Ord}(g) = \infty$，要么 $l > t \geq 1$ (如果 $c_l \neq 0$).

假设在 (2.II) 中 $N_0 = 2t+1$. 如果 $N_0 < ns+s$，合并方程 (2.1.9) 中 degree 为 $2t+1$ 的项，则有

$$\bar{z}f_{\mathrm{nor}}^{(2t)}(z, z\bar{z}) + z\overline{f_{\mathrm{nor}}^{(2t)}(z, z\bar{z})} + 2\mathrm{Re}\left[(b_{N_0} - a_{N_0})z^{N_0}\right] = 0. \tag{2.1.11}$$

注意到上式前两项为混合项，最后一项为调和项，这就要求 $a_{N_0} = b_{N_0}$. 因此，一定有 $N_0 = ns+s$，且定理 2.1.1 在这种情况之下同样很容易得到. 因此，下面关于第一步的证明中，我们总是假设

(2.III) $ns+s > N_0 \geq 2t+2,\ g(w) = O(|w|^l),\ l > t \geq 1.$

合并方程 (2.1.9) 中 (标准) degree 为 $2t+1$ 的项，有

$$\bar{z}f_{\mathrm{nor}}^{(2t)}(z, z\bar{z}) + z\overline{f_{\mathrm{nor}}^{(2t)}(z, z\bar{z})} = 0. \tag{2.1.12}$$

记 $f_{\mathrm{nor}}^{(2t)}(z, w) = \sum\limits_{k+2l=2t} a_{kl}z^k w^l$，并把它代入方程 (2.1.12), 得到

$$f_{\mathrm{nor}}^{(2t)}(z, w) = aw^t - \bar{a}z^2w^{t-1},$$

其中 $a \neq 0$. 因此，

$$\begin{aligned} f(z, w) &= f_{\mathrm{nor}}^{(2t)}(z, w) + f_{2t+1}(z, w) \\ &= aw^t - \bar{a}z^2w^{t-1} + f_{2t+1}(z, w). \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

接着，通过一个简单的计算，可以得到

$$wt(w) \geq s, \quad \mathrm{Ord}\big(w(z, \bar{z})\big) \geq 2, \quad wt\big(f_{\mathrm{nor}}^{(2t)}\big) \geq st+2-s,$$
$$wt\big(\overline{f_{\mathrm{nor}}^{(2t)}}\big) \geq st, \quad g = g_{2t+2}, \quad f = f_{\mathrm{nor}}^{(2t)} + f_{2t+1}(z, w),$$

且 $l_1 + l_2 \geq s$ 其中 $l_2 > 1$, 或 $l_1 + l_2 > s$ 其中 $l_2 \geq 1$, 那么

$$wt\big(z^{l_1} f_{\mathrm{nor}}^{(2t)l_2}\big) = l_1 + l_2(ts+2-s) \geq ts+2.$$

进一步，$wt(z^{l_1} f_{\mathrm{nor}}^{(2t)l_2} f_{2t+1}^{l_3}) \geq s$ 如果 $l_1 + l_2 + l_3 \geq s-1,\ l_2^2 + l_3^2 \neq 0$.

这样可验证：

$$wt\left(|f_{\mathrm{nor}}^{(2t)}|^2\right) \geq ts+2,$$
$$wt\big(\overline{f_{\mathrm{nor}}^{(2t)}} f_{2t+1}\big) \geq ts+2t+1,$$

$$wt\left(f_{\text{nor}}^{(2t)}\overline{f_{2t+1}}\right) \geq (2+(t-1)s)+(ts+s-1) \geq ts+2,$$
$$wt\left(|f_{2t+1}|^2\right) \geq 2t+1+(ts+s-1) \geq ts+2.$$

所以有

$$\begin{aligned}\left|f(z,w)\right|^2 &= \left|f_{\text{nor}}^{(2t)}\right|^2 + 2\text{Re}\left(\overline{f_{\text{nor}}^{(2t)}}f_{2t+1}\right) + \left|f_{2t+1}\right|^2 \\ &= \Theta_{ts+2}^{2t+2}.\end{aligned}$$

把 (2.1.13) 代入 (2.1.9) 并利用上述关系式有

$$\begin{aligned}g_{2t+2}(w) =& 2\text{Re}\left[(\bar{z}+sz^{s-1})f\right] + \left|f(z,w)\right|^2 \\ &+ 2\text{Re}\left(\sum_{l=2}^{s}\mathbb{P}_{s-l}^{s-l}f^l\right) + 2\text{Re}\left(\sum_{\tau=ks+j<N_0}\sum_{l=0}^{\tau-1}\mathbb{P}_l^l f^{\tau-l}\right) \\ &+ 2\text{Re}\left[(b_{N_0}-a_{N_0})z^{N_0}\right] + \Theta_{\min\{N_0+1,ns+s\}}^{\min\{N_0+1,ns+s\}} \\ =& 2\text{Re}\left[(\bar{z}+sz^{s-1})f_{\text{nor}}^{(2t)} + (\bar{z}+sz^{s-1})f_{2t+1}(z,w)\right] \\ &+ 2\text{Re}\left[(b_{N_0}-a_{N_0})z^{N_0}\right] + \Theta_s^2 f_{2t+1}(z,w) \\ &+ \Theta_s^2\overline{f_{2t+1}(z,w)} + \Theta_{N_s}^{2t+2},\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

其中 N_0 在前面已经定义，$N_s := \min\{ts+2, N_0+1, ns+s\}$.

注意到

$$\begin{aligned}&\bar{z}f_{\text{nor}}^{(2t)} + z\overline{f_{\text{nor}}^{(2t)}} + 2\text{Re}\left(sz^{s-1}f_{\text{nor}}^{(2t)}\right) \\ &= 2\text{Re}\left[\bar{z}(aw^t - \bar{a}z^2w^{t-1}) + sz^{s-1}(aw^t - \bar{a}z^2w^{t-1})\right] \\ &= -\bar{a}z^2\bar{z}w^{t-1} + z\bar{a}w^t - sz^{s-1}\bar{a}z^2w^{t-1} + \Theta_{ts+2}^{2t+2} \\ &= (1-s)\bar{a}z^{s+1}w^{t-1} + \Theta_{ts+2}^{2t+2},\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

所以

$$\begin{aligned}g_{2t+2}(w) =& (1-s)\bar{a}z^{s+1}(z\bar{z}+z^s)^{t-1} + (\bar{z}+sz^{s-1}+\Theta_s^2)f_{2t+1}(z,w) \\ &+ 2\text{Re}\left[(b_{N_0}-a_{N_0})z^{N_0}\right] + (z+s\bar{z}^{s-1}+\Theta_s^2)\overline{f_{2t+1}(z,w)} \\ &+ \Theta_{N_s}^{2t+2}.\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

如果 $t=1$，合并方程 (2.1.16) 中 degree 为 $s+1$ 的项，并且注意到由给定的条件 $N_0 > s+1$，则

$$\begin{aligned}\sum_{2j}\delta_{2j}^{s+1}g_{\text{nor}}^{(2j)}(z\bar{z}) =& (1-s)\bar{a}z^{s+1} + \bar{z}f_{\text{nor}}^{(s)}(z,z\bar{z}) \\ &+ z\overline{f_{\text{nor}}^{(s)}(z,z\bar{z})} + \mathbb{P}_{s+2}^{s+1},\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

这里 δ_{2j}^{s+1} 在 $2j = s+1$ 时取值 1，否则取 0.

因为 $s+2 \geq s+1$，$\mathbb{P}_{s+2}^{s+1} = \bar{z}A$，其中 A 是一个多项式. 因此容易得到 $\bar{z}$ 整除 $(1-s)\bar{a}z^{s+1}$. 这样就得到了矛盾，所以 $t>1$. 即现在有

$$\begin{aligned} g_{2t+2}(w) =&(1-s)\bar{a}z^{s+1}(z\bar{z}+z^s)^{t-1} + (\bar{z}+sz^{s-1}+\Theta_s^2)f_{2t+1}(z,w) \\ &+ 2\mathrm{Re}\left[(b_{N_0}-a_{N_0})z^{N_0}\right] + (z+s\bar{z}^{s-1}+\Theta_s^2)\overline{f_{2t+1}(z,w)} \\ &+ \Theta_{N_s}^{2t+2}, \quad t>1. \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

接着，我们证明如下的引理：

引理 2.1.2　假设

$$2t+j(s-2)+2 \leq m \leq 2t+(j+1)(s-2)+1,$$

其中 $0 \leq j \leq t-1$ 且 $m \leq N_0$. 跟前面一样记 $N_s := \min\{ts+2, N_0+1, ns+s\}$，那么

$$\begin{aligned} g_m(w) =&\bar{a}(1-s)^{j+1}z^{(j+1)s+1}(z\bar{z}+z^s)^{t-j-1} \\ &+ (\bar{z}+sz^{s-1}+\Theta_s^2)f_{m-1}(z,w) \\ &+ (z+s\bar{z}^{s-1}+\Theta_s^2)\overline{f_{m-1}(z,w)} \\ &+ 2\mathrm{Re}\left[(b_{N_0}-a_{N_0})z^{N_0}\right] + \Theta_{N_s}^m. \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

证　如果 $m = ns+s$, $N_s \leq m$，那么由 N_s 的定义，(2.1.19) 自动成立. 因此在下面的证明中，总是假设 $m \leq ns+s-1$.

上面的讨论证明了当 $m = 2t+2$ 时上述引理成立. 下面我们分三步来证明引理.

第一步　这个步骤在 $s=3$ 时不需要. 记 $m_0 = 2t+j(s-2)+2$，这里 j 是一个整数且满足 $0 \leq j \leq t-1$. 假设 $m_0 \leq N_0$，同时假定存在一个整数 m 满足 $m \geq m_0$，$m+1 \leq 2t+(j+1)(s-2)+1$ (这样一个整数 m 当 $s=3$ 时自然不存在)，$m+1 \leq N_0$，并且进一步，(2.1.19) 对这个 m 成立. 合并方程 (2.1.19) 中 degree 为 m 的项，得到

$$g_{\mathrm{nor}}^{(m)}(z\bar{z}) = \bar{z}f_{\mathrm{nor}}^{(m-1)}(z,z\bar{z}) + z\overline{f_{\mathrm{nor}}^{(m-1)}(z,z\bar{z})} + \hat{\mathbb{P}}_{N_s}^m. \tag{2.1.20}$$

由引理 2.1.1 (iii)，$g_{\text{nor}}^{(m)}$ 为实值函数，所以 $\hat{\mathbb{P}}_{N_s}^m(=\mathbb{P}_{N_s}^m)$ 一定取实值, 并且 $g^{(m)}(z\overline{z})$ 的 weight 至少为 N_s. 可以记

$$g_{\text{nor}}^{(m)}(z\overline{z})-\hat{\mathbb{P}}_{N_s}^m=\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha+\beta(s-1)\geq N_s}} a_{\alpha\beta}z^{\alpha}\overline{z}^{\beta}. \tag{2.1.21}$$

同时记

$$f_{\text{nor}}^{(m-1)}(z,z\overline{z})=\sum_{\widetilde{\alpha}+2\widetilde{\beta}=m-1} b_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}z^{\widetilde{\alpha}}(z\overline{z})^{\widetilde{\beta}}=\sum_{\widetilde{\alpha}+2\widetilde{\beta}=m-1} b_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}z^{\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}}\overline{z}^{\widetilde{\beta}}. \tag{2.1.22}$$

那么

$$\begin{aligned}&\sum_{\widetilde{\alpha}+2\widetilde{\beta}=m-1} b_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}z^{\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}}\overline{z}^{\widetilde{\beta}+1}+\sum_{\widetilde{\alpha}+2\widetilde{\beta}=m-1}\overline{b_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}}\overline{z}^{\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}}z^{\widetilde{\beta}+1}\\ &=\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha+\beta(s-1)\geq N_s}} a_{\alpha\overline{\beta}}z^{\alpha}\overline{z}^{\beta}.\end{aligned} \tag{2.1.23}$$

因 (2.1.20) 中左右两边均取实值，故对任意的 $a_{\alpha\overline{\beta}}\neq 0$，都有

$$\beta+\alpha(s-1)\geq N_s.$$

容易得到，如果 m 是偶数，那么当 $\alpha=\beta=\frac{m}{2}$, $\widetilde{\alpha}=1$, $\widetilde{\beta}=\frac{m}{2}-1$, $c\in\mathbb{R}$ 时，$2b_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}=a_{\alpha\bar{\beta}}+\mathrm{i}c$. 其他的关系如下:

$$\begin{aligned}b_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}=b_{\alpha\bar{\beta}},\ \ &\text{如果}\ \widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}=\alpha,\ \widetilde{\alpha}+2\widetilde{\beta}=m-1,\ \widetilde{\beta}+1=\beta,\\ &\widetilde{\alpha}>1,\ \text{且}\ \alpha+(s-1)\beta\geq N_s,\ \beta+(s-1)\alpha\geq N_s.\end{aligned} \tag{2.1.24}$$

从这些能够看出

$$\begin{aligned}wt\big(f_{\text{nor}}^{(m-1)}(z,z\overline{z})\big)&\geq\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}+(s-1)\widetilde{\beta}\\ &=\alpha+(s-1)\beta-s+1\\ &\geq N_s-s+1,\end{aligned} \tag{2.1.25}$$

$$\begin{aligned}wt\left(\frac{\partial f_{\text{nor}}^{(m-1)}}{\partial w}(z,z\overline{z})\right)&\geq\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}+(s-1)\widetilde{\beta}-s\\ &=\alpha+(s-1)\beta-s+1-s\\ &\geq N_s-2s+1,\end{aligned} \tag{2.1.26}$$

$$wt\big(f_{\text{nor}}^{(m-1)}(z,z\overline{z})-f_{\text{nor}}^{(m-1)}(z,w)\big)\geq N_s-s+1, \tag{2.1.27}$$

$$
\begin{aligned}
wt\left(\overline{f_{\text{nor}}^{(m-1)}(z,z\overline{z})}\right) &\geq (s-1)\widetilde{\alpha}+s\widetilde{\beta} \\
&= (s-1)(\alpha-\beta+1)+s(\beta-1) \\
&\geq N_s-1,
\end{aligned}
\tag{2.1.28}
$$

$$
wt\left(\overline{f_{\text{nor}}^{(m-1)}(z,z\overline{z})-f_{\text{nor}}^{(m-1)}(z,w)}\right) \geq N_s-1. \tag{2.1.29}
$$

把方程 (2.1.22) 代入 (2.1.19) 并利用 (2.1.25)~(2.1.29)，有

$$
\begin{aligned}
g_{m+1}(w) =&(1-s)^{j+1}\overline{a}z^{(j+1)s+1}(z\overline{z}+z^s)^{t-j-1} \\
&+(\overline{z}+sz^{s-1}+\Theta_s^2)f_m(z,w) \\
&+(z+s\overline{z}^{s-1}+\Theta_s^2)\overline{f_m(z,w)}+\Theta_{N_s}^{m+1} \\
&+(sz^{s-1}+\Theta_s^2)f_{\text{nor}}^{(m-1)}+2\text{Re}\left((b_{N_0}-a_{N_0})z^{N_0}\right) \\
&+(s\overline{z}^{s-1}+\Theta_s^2)\overline{f_{\text{nor}}^{(m-1)}}.
\end{aligned}
\tag{2.1.30}
$$

由 (2.1.25) 和 (2.1.28)，得到

$$
(sz^{s-1}+\Theta_s^2)f_{\text{nor}}^{(m-1)}+(s\overline{z}^{s-1}+\Theta_s^2)\overline{f_{\text{nor}}^{(m-1)}}=\mathbb{P}_{N_s}^{m+1}.
$$

因此

$$
\begin{aligned}
g_{m+1}(w) =&(1-s)^{(j+1)}\overline{a}z^{(j+1)s+1}(z\overline{z}+z^s)^{t-j-1} \\
&+(\overline{z}+sz^{s-1}+\Theta_s^2)f_m(z,w) \\
&+(z+s\overline{z}^{s-1}+\Theta_s^2)\overline{f_m(z,w)} \\
&+2\text{Re}\left((b_{N_0}-a_{N_0})z^{N_0}\right)+\Theta_{N_s}^{m+1}.
\end{aligned}
\tag{2.1.31}
$$

由归纳，我们证明了如果引理对上面定义的 m_0 成立, 那么一定对任意满足 $m_0 \leq m \leq 2t+(j+1)(s-2)+1$ 和 $m \leq N_0$ 的 m 也成立.

第二步 在这个步骤里，假定引理对满足 $m \in [2t+j(s-2)+2, 2t+(j+1)(s-2)+1]$ 和 $m \leq N_0$ 的 m 成立，这里 j 是一个特定的非负且小于或等于 $t-2$ 的正整数. 现在对满足 $m \in [2t+(j+1)(s-2)+2, 2t+(j+2)(s-2)+1]$ 且 $m \leq N_0$ 的 m 继续证明引理.

假定 $2t+(j+1)(s-2)+1<N_0$. 由假设，可以得到

$$\begin{aligned}g_{2t+(j+1)(s-2)+1}(w)=&\bar{a}(1-s)^{j+1}z^{(j+1)s+1}(z\bar{z}+z^s)^{t-j-1}\\&+(\bar{z}+sz^{s-1}+\Theta_s^2)f_{2t+(j+1)(s-2)}(z,w)\\&+(z+s\bar{z}^{s-1}+\Theta_s^2)\overline{f_{2t+(j+1)(s-2)}(z,w)}\\&+2\mathrm{Re}\left((b_{N_0}-a_{N_0})z^{N_0}\right)\\&+\Theta_{N_s}^{2t+(j+1)(s-2)+1}.\end{aligned}\tag{2.1.32}$$

合并方程 (2.1.32) 中 degree 为 $2t+(j+1)(s-2)+1$ 的项，有

$$\begin{aligned}g_{\mathrm{nor}}^{(2t+(j+1)(s-2)+1)}(z\bar{z})=&\bar{a}(1-s)^{j+1}z^{(j+1)s+1}(z\bar{z})^{t-j-1}\\&+\hat{\mathbb{P}}_{N_s}^{2t+(j+1)(s-2)+1}+\bar{z}f_{\mathrm{nor}}^{(2t+(j+1)(s-2))}(z,z\bar{z})\\&+z\overline{f_{\mathrm{nor}}^{(2t+(j+1)(s-2))}(z,z\bar{z})}.\end{aligned}\tag{2.1.33}$$

这里，我们用 $\hat{\mathbb{P}}_{N_s}^{2t+(j+1)(s-2)+1}$ 表示一个特定的满足 degree 为 $2t+(j+1)(s-2)+1$ 且 weight 至少为 N_s 的齐次多项式.

现在来求解 (2.1.33). 记 $\Lambda=2t+(j+1)(s-2)$. 注意到

$$I:=-\hat{\mathbb{P}}_{N_s}^{\Lambda+1}+a(1-s)^{j+1}\bar{z}^{(j+1)s+1}(z\bar{z})^{t-j-1}+g^{(\Lambda+1)}(z\bar{z}),$$

取实值且 $I=\mathbb{P}_{N_s}^{\Lambda+1}$. 那么 (2.1.33) 可以写成

$$\begin{aligned}I=&\bar{a}(1-s)^{j+1}z^{(j+1)s+1}(z\bar{z})^{t-j-1}\\&+a(1-s)^{j+1}\bar{z}^{(j+1)s+1}(z\bar{z})^{t-j-1}\\&+\bar{z}f_{\mathrm{nor}}^{(2t+(j+1)(s-2))}(z,z\bar{z})\\&+z\overline{f_{\mathrm{nor}}^{(2t+(j+1)(s-2))}(z,z\bar{z})}.\end{aligned}\tag{2.1.34}$$

记

$$I=\sum_{\substack{l+k=\Lambda+1\\l+(s-1)k\geq N_s}}a_{l\bar{k}}z^l\bar{z}^k.$$

因为 $a_{l\bar{k}}=\overline{a_{k\bar{l}}}$，所以我们要求 $k+(s-1)l\geq N_s$.

接着，可以得到 (2.1.34) 的一般解:

$$f_{\mathrm{nor}}^{(2t+(j+1)(s-2))}(z,w)=f_1^{(\Lambda)}+f_2^{(\Lambda)},\tag{2.1.35}$$

其中

$$f_1^{(\Lambda)}=-\bar{a}(1-s)^{j+1}z^{(j+1)s+2}w^{t-j-2},\quad f_2^{(\Lambda)}=\sum_{\tilde{l}+2\tilde{k}=\Lambda}h_{\tilde{l}\tilde{k}}z^{\tilde{l}}w^{\tilde{k}}.$$

这里 $h'_{\widetilde{l}\,\widetilde{k}}s$ 由下面的方程所决定:

$$\sum h_{\widetilde{l}\,\widetilde{k}} z^{\widetilde{l}+\widetilde{k}} \bar{z}^{\widetilde{k}+1} + \sum \overline{h_{\widetilde{l}\,\widetilde{k}} z^{\widetilde{l}+\widetilde{k}+1} \bar{z}^{\widetilde{k}}} = \sum_{l,k} a_{lk} z^l \bar{z}^k. \tag{2.1.36}$$

因此，可以看到，如果 $h_{\widetilde{l}\,\widetilde{k}} \neq 0$，那么要么 $\widetilde{l} = 1$，$2\widetilde{k} = \Lambda$ (如果 Λ 为偶数)，要么 $\widetilde{l} + \widetilde{k} = l$，$\widetilde{k} + 1 = k$，这里 l, k 满足前面叙述的性质. 基于这样的分析及前面的讨论，可以得到下述方程:

$$\left.\begin{aligned}
wt\big(f_2^{(\Lambda)}(z,w) - f_2^{(\Lambda)}(z,z\bar{z})\big) &\geq N_s - s + 1,\\
wt\Big(\overline{f_2^{(\Lambda)}(z,w) - f_2^{(\Lambda)}(z,z\bar{z})}\Big) &\geq N_s - 1,\\
(sz^{s-1} + \Theta_s^2) f_2^{(\Lambda)}(z,z\bar{z}) + (s\bar{z}^{s-1} + \Theta_s^2)\overline{f_2^{(\Lambda)}(z,z\bar{z})} &= \Theta_{N_s}^{\Lambda+2},\\
(sz^{s-1} + \Theta_s^2) f_2^{(\Lambda)}(z,w) + (s\bar{z}^{s-1} + \Theta_s^2)\overline{f_2^{(\Lambda)}(z,w)} &= \Theta_{N_s}^{\Lambda+2},\\
wt\big(f_1^{(\Lambda)}(z,z\bar{z})\big) &\geq st - s + 2,\\
wt\Big(\overline{f_1^{(\Lambda)}(z,w) - f_1^{(\Lambda)}(z,z\bar{z})}\Big) &\geq N_s.
\end{aligned}\right\} \tag{2.1.37}$$

例如，我们有

$$wt\big(f_2^{(\Lambda)}(z,z\bar{z})\big) \geq \widetilde{l} + s\widetilde{k} \geq l - k + 1 + s(k-1) \geq N_s - s + 1.$$

因此，由 (2.1.32)~(2.1.37)，可以得到

$$\begin{aligned}
&g_{\Lambda+2}(w) + g_{\rm nor}^{(\Lambda+1)}(w)\\
&\quad= 2{\rm Re}\left((b_{N_0} - a_{N_0})z^{N_0}\right) + (\bar{z} + sz^{s-1} + \Theta_s^2) f_{\Lambda+1}(z,w)\\
&\qquad + (z + s\bar{z}^{s-1} + \Theta_s^2)\overline{f_{\Lambda+1}(z,w)} + \Theta_{N_s}^{\Lambda+2} + \hat{\mathbb{P}}_{N_s}^{\Lambda+1}\\
&\qquad + \bar{a}(1-s)^{j+1} z^{(j+1)s+1} (z\bar{z} + z^s)^{t-j-1}\\
&\qquad + (\bar{z} + sz^{s-1} + \Theta_s^2) f_{\rm nor}^{(\Lambda)}(z,w)\\
&\qquad + (z + s\bar{z}^{s-1} + \Theta_s^2)\overline{f_{\rm nor}^{(\Lambda)}(z,w)}.
\end{aligned} \tag{2.1.38}$$

注意到

$$\begin{aligned}
g_{\rm nor}^{(\Lambda+1)}(z\bar{z}) =& \bar{a}(1-s)^{j+1} z^{(j+1)s+1} (z\bar{z})^{t-j-1} + \bar{z} f_{\rm nor}^{(\Lambda)}(z,z\bar{z})\\
&+ z\overline{f_{\rm nor}^{(\Lambda)}(z,z\bar{z})} + \hat{\mathbb{P}}_{N_s}^{\Lambda+1},\\
&g_{\rm nor}^{(\Lambda+1)}(w) - g_{\rm nor}^{(\Lambda+1)}(z\bar{z}) \in \Theta_{N_s}^{\Lambda+2},
\end{aligned}$$

我们有

$$g_{\Lambda+2}(w) =(\bar{z} + sz^{s-1} + \Theta_s^2)f_{\Lambda+1}(z,w) + 2\mathrm{Re}\left((b_{N_0} - a_{N_0})z^{N_0}\right) \\ + (z + s\bar{z}^{s-1} + \Theta_s^2)\overline{f_{\Lambda+1}(z,w)} + \Theta_{N_s}^{\Lambda+2} + J, \quad (2.1.39)$$

其中

$$J =(\bar{z} + sz^{s-1} + \Theta_s^2)f_{\mathrm{nor}}^{(\Lambda)}(z,w) + (z + s\bar{z}^{s-1} + \Theta_s^2)\overline{f_{\mathrm{nor}}^{(\Lambda)}(z,w)} \\ + \bar{a}(1-s)^{j+1}z^{(j+1)s+1}(z\bar{z} + z^s)^{t-j-1} \\ - \bar{a}(1-s)^{j+1}z^{(j+1)s+1}(z\bar{z})^{t-j-1} \\ - \left(\bar{z}f_{\mathrm{nor}}^{(\Lambda)}(z,z\bar{z}) + z\overline{f_{\mathrm{nor}}^{(\Lambda)}(z,z\bar{z})}\right). \quad (2.1.40)$$

这里注意到

$$\bar{z}f_{\mathrm{nor}}^{(\Lambda)}(z,w) + z\overline{f_{\mathrm{nor}}^{(\Lambda)}(z,w)} - (\bar{z}f_{\mathrm{nor}}^{(\Lambda)}(z,z\bar{z}) + z\overline{f_{\mathrm{nor}}^{(\Lambda)}(z,z\bar{z})}) \\ +\bar{a}(1-s)^{j+1}z^{(j+1)s+1}(z\bar{z} + z^s)^{t-j-1} \\ -\bar{a}(1-s)^{j+1}z^{(j+1)s+1}(z\bar{z})^{t-j-1} \\ = -\bar{a}(1-s)^{j+1}z^{(j+1)s+1}z\bar{z}(z\bar{z}+z^s)^{t-j-2} + \Theta_{N_s}^{\Lambda+2} \\ +\bar{a}(1-s)^{j+1}z^{(j+1)s+1}(z\bar{z})^{t-j-1} + \Theta_{N_s}^{\Lambda+2} \\ +\bar{a}(1-s)^{j+1}z^{(j+1)s+1}(z\bar{z}+z^s)^{t-j-1} \\ -\bar{a}(1-s)^{j+1}z^{(j+1)s+1}(z\bar{z})^{t-j-1} \\ = \bar{a}(1-s)^{j+1}z^{(j+2)s+1}(z\bar{z}+z^s)^{t-j-2} + \Theta_{N_s}^{\Lambda+2},$$

因此现在结合 (2.1.35) 中 $f_1^{(\Lambda)}$ 的表达式，我们得到

$$J =(sz^{s-1} + \Theta_s^2)f_1^{(\Lambda)}(z,w) + (s\bar{z}^{s-1} + \Theta_s^2)\overline{f_1^{\Lambda}(z,w)} \\ + \bar{a}(1-s)^{j+1}z^{(j+2)s+1}(z\bar{z}+z^s)^{t-j-2} + \Theta_{N_s}^{\Lambda+2} \\ =\bar{a}(1-s)^{j+2}z^{(j+2)s+1}w^{t-j-2} + \Theta_{N_s}^{\Lambda+2}. \quad (2.1.41)$$

这就在 $m = 2t + (j+2)s + 2$ 时证明了引理. 现在，联系在前一步里得到的结论，可以得到前面在这一步中的断言.

第三步 现在利用前面两个步骤中得到的结论，用归纳法来完成引理的证明. 事实上，因为已经知道引理对 $m = 2t + 2$ 成立，可以得到，由第一步，引理对所有满足 $m \le N_0$ 和 $m \in [2t+2, 2t+(s-2)+1]$ 的 m 都成立. 现在利用第二步接着再利用第一步，可以得到，如果 $m \le N_0$ 且 $m \in [2t+j(s-2)+2, 2t+(j+1)(s-2)+1]$,

其中 $j=1$，那么引理对这样的 m 得证. 最后，对 j 进行归纳讨论，可以得到引理 2.1.2的证明. ■

接下来完成当 $\mathrm{Ord}(f)=2t$ 时定理 2.1.1的证明. 首先，如果 $m=ts+1<N_0$，那么由引理 2.1.2，有

$$\begin{aligned} g_{ts+1}(w)=&\bar{a}(1-s)^t z^{ts+1}+\Theta_{ts+2}^{ts+1}+(\bar{z}+sz^{s-1}+\Theta_s^2)f_{ts}(z,w)\\ &+(z+s\bar{z}^{s-1}+\Theta_s^2)\overline{f_{ts}(z,w)}. \end{aligned}$$

合并上述方程中 degree 为 $ts+1$ 的项，得到

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{nor}}^{(ts+1)}(z\bar{z})=&\bar{a}(1-s)^t z^{ts+1}+\mathbb{P}_{ts+2}^{ts+1}+\bar{z}f_{\mathrm{nor}}^{(ts)}(z,z\bar{z})\\ &+z\overline{f_{\mathrm{nor}}^{(ts)}(z,z\bar{z})}. \end{aligned} \tag{2.1.42}$$

因为 $ts+2>ts+1$，可以记 $\mathbb{P}_{ts+2}^{ts+1}=\bar{z}A(z,\bar{z})$，其中 A 为一个多项式. 因此，上面的方程可解当且仅当 $a=0$, 这与前面假设 $a\neq 0$ 相矛盾.

接着，假设 $2t+1<N_0\leq ts+1$. 由定理中的正规化假设，注意到 $N_0\neq ts+1$. 因此，一定有 $2t+1<N_0<ts+1$. 假设 $N_0\leq ns+s-1$，并假设整数 j 满足

$$2t+j(s-2)+2\leq k_0s+j_0\leq 2t+(j+1)(s-2)+1.$$

那么由引理 2.1.2 并合并方程 (2.1.19) 中 degree 为 N_0 的项，我们得到

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{nor}}^{(N_0)}(z\bar{z})=&2\mathrm{Re}\left[(b_{N_0}-a_{N_0})z^{N_0}\right]+\delta(1-s)^{j+1}\bar{a}z^{(j+1)s+1}(z\bar{z})^{t-j-1}\\ &+\bar{z}f_{\mathrm{nor}}^{(N_0)}(z,z\bar{z})+z\overline{f_{\mathrm{nor}}^{(N_0)}(z,z\bar{z})}+\Theta_{N_0+1}^{N_0}, \end{aligned}$$

这里 δ 在 $N_0<2t+(j+1)(s-2)+1$ 时为 0，在 $N_0=2t+(j+1)(s-2)+1$ 时为 1. 用同上面一样的讨论，同样可以得到矛盾.

因此，要想不得到矛盾，必须有 $b_N=a_N$ 对任意的 $N\leq ns+s-1$，即 $N_0=ns+s$. 由此得到 $ts+1\geq ns+s$ 且 $t\geq n+1$. 这样最终完成了定理 2.1.1中第一部分的证明.

定理 2.1.1 证明的第二部分　在这一部分里，我们将用第一部分中类似的方法，来证明当 $\mathrm{Ord}(f)$ 为一个有限的奇数时，定理 2.1.1 仍然成立. 设 $\mathrm{Ord}(f)=2t+1$，$g(w)$ 和 $\widehat{N_0}$ 如同第一步中那样定义且有 (2.1.10) 此时仍然成立. 这样定理在 $2t+1\geq N_0$ 时同第一部分可得.

如果 $2t+1<N_0$，那么当 $c_l \neq 0$ 时，

$$2l \geq \widehat{N_0}+1=\min\{2t+2, sn+s\}=2t+2,$$

所以此时有 $l \geq t+1$. 在这种情况下，假设 $N_0=2t+2$ 且 $N_0<ns+s$. 合并 (2.1.9) 中 degree 为 $2t+2$ 的项，得到

$$\begin{aligned}&-\sum\nolimits_{2j}\delta_{2j}^{2t+2}g_{\rm nor}^{(2t+2)}(z\bar{z})+\bar{z}f_{\rm nor}^{(2t+1)}(z,z\bar{z})+z\overline{f_{\rm nor}^{(2t+1)}(z,z\bar{z})}\\&\quad+2\mathrm{Re}\left((b_{N_0}-a_{N_0})z^{N_0}\right)=0,\end{aligned}\tag{2.1.43}$$

这里 δ_{2j}^{2t+2} 在 $2j=2t+2$ 时取 1，否则取值 0. 由此得到 $a_{N_0}=b_{N_0}$. 所以此时有 $N_0=ns+s$，定理 2.1.1 在此种情况成立则只需考虑如下情况:

$$N_0 \geq 2t+3,\ g(w)=O(|w|^l),\ \text{且}\ l \geq t+1.$$

合并 (2.1.9) 中 degree 为 $2t+2$ 的项，有

$$g_{\rm nor}^{(2t+2)}(z\bar{z})=\bar{z}f_{\rm nor}^{(2t+1)}(z,z\bar{z})+z\overline{f_{\rm nor}^{(2t+1)}(z,z\bar{z})}.\tag{2.1.44}$$

它的解为

$$f_{\rm nor}^{(2t+1)}(z,w)=bzw^t,\quad g_{\rm nor}^{(2t+2)}(w)=(b+\bar{b})w^{t+1},\quad b\neq 0.$$

即此时

$$\left.\begin{aligned}f(z,w)&=bzw^t+f_{2t+2}(z,w),\\g(z,w)&=(b+\bar{b})w^{t+1}+g_{2t+3}(z,w).\end{aligned}\right\}\tag{2.1.45}$$

类似于 N_s 的定义，记 $N_s':=\min\{ts+s+1, N_0+1, ns+s\}$. 把 (2.1.45) 代入 (2.1.9) 且记 $A=(s-1)b-\bar{b}$，我们得到与 (2.1.16) 类似的公式:

$$\begin{aligned}g_{2t+3}(w)=&Az^s(z\bar{z}+z^s)^t+(\bar{z}+sz^{s-1}+\Theta_s^2)f_{2t+2}(z,w)\\&+(z+s\bar{z}^{s-1}+\Theta_s^2)\overline{f_{2t+2}(z,w)}\\&+2\mathrm{Re}\left((b_{N_0}-a_{N_0})z^{N_0}\right)+\Theta_{N_s}^{2t+3}.\end{aligned}\tag{2.1.46}$$

现在我们有引理 2.1.2 的如下对偶形式:

引理 2.1.3 假设

$$2t+j(s-2)+3 \leq m \leq 2t+(j+1)(s-2)+2,$$

其中 $0 \le j \le t$ 且 $m \le N_0$. 那么有

$$
\begin{aligned}
g_m(w) =& A(1-s)^j z^{(j+1)s}(z\bar{z}+z^s)^{t-j} \\
&+ (\bar{z}+sz^{s-1}+\Theta_s^2) f_{m-1}(z,w) \\
&+ (z+s\bar{z}^{s-1}+\Theta_s^2)\overline{f_{m-1}(z,w)} \\
&+ 2\mathrm{Re}\left((b_{N_0}-a_{N_0})z^{N_0}\right) + \Theta_{N_s'}^m.
\end{aligned} \tag{2.1.47}
$$

如果 $m = ts+s < N_0$，那么在 (2.1.47) 中令 $j=t$，得到

$$
\begin{aligned}
g_{ts+s}(w) =& A(1-s)^t z^{ts+s} + \Theta_{ts+s+1}^{ts+s} \\
&+ (\bar{z}+sz^{s-1}+\Theta_s^2) f_{ts+s-1}(z,w) \\
&+ (z+s\bar{z}^{s-1}+\Theta_s^2)\overline{f_{ts+s-1}(z,w)} \\
&+ \Theta_{ts+s+1}^{ts+s}.
\end{aligned} \tag{2.1.48}
$$

合并 (2.1.48) 中 degree 为 $ts+s$ 的项，可以得到

$$
\begin{aligned}
g_{\mathrm{nor}}^{(ts+s)}(z\bar{z}) =& A(1-s)^t z^{ts+s} + \mathbb{P}_{ts+s+1}^{ts+s} + \bar{z} f_{\mathrm{nor}}^{(ts+s-1)}(z,z\bar{z}) \\
&+ \overline{z f_{\mathrm{nor}}^{(ts+s-1)}(z,z\bar{z})}.
\end{aligned} \tag{2.1.49}
$$

跟前面讨论一样，上述方程有解当且仅当 $A=0$，从而 $b=0$，这就得到了矛盾.

接着假设 $2t+3 \le N_0 \le ts+s$. 那么由定理中的正规化条件，$N_0 \ne ts+s$，即 $2t+3 \le N_0 < ts+s$. 如果 $N_0 \le ns+s-1$ 且整数 j 满足

$$
2t+j(s-2)+3 \le k_0 s + j_0 \le 2t+(j+1)(s-2)+2,
$$

那么由引理 2.1.3，若合并 (2.1.47) 中 degree 为 N_0 的项

$$
\begin{aligned}
g_{\mathrm{nor}}^{(N_0)}(z\bar{z}) =& 2\mathrm{Re}\{(b_{N_0}-a_{N_0})z^{N_0}\} + \delta A(1-s)^j z^{(j+1)s}(z\bar{z})^{t-j} \\
&+ \bar{z} f_{\mathrm{nor}}^{(N_0-1)}(z,z\bar{z}) + \overline{z f_{\mathrm{nor}}^{(N_0-1)}(z,z\bar{z})} + \Theta_{N_0+1}^{N_0},
\end{aligned}
$$

这里 δ 在 $N_0 < 2t+(j+1)(s-2)+2$ 时为 0，在 $N_0 = 2t+(j+1)(s-2)+2$ 时为 1，跟前面一样，这就得到了矛盾. 所以一定有对所有的 $N \le ns+s-1$，都有 $b_N = a_N$，即 $N_0 = ns+s$. 所以 $ts+s \ge ns+s$，进一步 $2t+1 \ge 2n+1$. 这样我们就完成了定理 2.1.1 的证明. ■

由定理 2.1.1的证明和引理 2.1.1 (ii), (iii), 实际上可以得到如下稍强的结论.

定理 2.1.2 假设保原点的形式等价映射

$$(z',w') = \big(F(z,w), w'(z,w)\big)$$

把由如下定义的形式 Bishop 曲面 M:

$$w = z\bar{z} + 2\mathrm{Re}\Bigg(z^s + \sum_{j=2,\cdots,s-1;\ ks+j\le N} a_{ks+j} z^{ks+j}\Bigg) + o\big(|z|^N\big)$$

映射到由下述方程定义的形式 Bishop 曲面:

$$w' = z'\overline{z'} + 2\mathrm{Re}\Bigg(z'^s + \sum_{j=2,\cdots,s-1;\ ks+j\le N} b_{ks+j} z'^{ks+j}\Bigg) + o\big(|z'|^N\big),$$

其中 $N \ge s$, a_{ks+j}, b_{ks+j} 是复数, 那么存在满足 $\mathrm{e}^{\sqrt{-1}s\theta} = 1$ 的常数 θ 使得 $F = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + f(z,w), w + g(z,w))$, 并且当 $\mathrm{Ord}(f) = 2t$ 时有 $st + 1 > N$, 当 $\mathrm{Ord}(f) = 2t+1$ 时有 $st + s > N$. 同时还有

$$g(z,w) = g(w) + g^*(z,w),$$

且还有 $wt_{\mathrm{nor}}(g^*(z,w)) > N$ 和

$$wt_{\mathrm{nor}}(g(w)) \ge wt_{\mathrm{nor}}(f(z,w)) + 1.$$

进一步, 对所有 $ks + j \le N$ 有 $a_{ks+j} = \mathrm{e}^{j\sqrt{-1}\theta} b_{ks+j}$.

2.2 具有消失 Bishop 不变量的 Bishop 曲面的完全形式不变量

在这一节里，我们将运用保原点的形式变换，得到由方程 (2.1.2) 定义的形式曲面的一个形式正规型. 这样就给出了 $\lambda = 0$, $s < \infty$ 的形式 Bishop 曲面芽 $(M, 0)$ 的完全不变量. 特别地，可以用它来给出 Moser 在 1985 年 ([p. 399, Mos85]) 提出的一个开问题的否定答案. 利用我们的完全形式不变量，还得到几乎所有的 Bishop 不变量为 0 的 Bishop 曲面不能双全纯等价于一个代数流形. 其证明如同 Forstneric 在 [For04] 中对于 CR 情形的讨论，主要用到了 Baire 范畴定理. 注意到，这个现象与非例外椭圆情形的 Bishop 曲面有相当大的不同. 前面已经提到，Moser-Webster 在他

们著名的工作 [MW85] 中，证明了任意具有消失 Bishop 不变量的 Bishop 曲面都双全纯等价于一个代数正规型.

设 M 是 $\mathbb{C}^2$ 中由如下方程定义的形式 Bishop 曲面

$$w = H(z,\overline{z}) = z\overline{z} + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{j=s}^{N} a_j z^j\right) + E_{N+1}(z,\overline{z}), \tag{2.2.1}$$

其中 $s \geq 3$ 是一个正整数，且 E_{N+1} 是 $(z,\overline{z})$ 的形式幂级数，满足 $\mathrm{Ord}(E_{N+1}) \geq N+1$. 进一步，$a_s = 1$ 且对 $m > s$, $m \leq N$,

$$a_m = 0, \quad 如果\ m = 0, 1 \bmod s.$$

首先我们有如下的正规性定理：

定理 2.2.1 沿用上面的记号. 存在一个多项式映射

$$\begin{cases} z' = z + f(z,w), & f(z,w) = O(|w| + |z|^2), \\ w' = w + g(z,w), & g(z,w) = O(|w|^2 + |z|^3 + |zw|) \end{cases} \tag{2.2.2}$$

把由 (2.2.1) 定义的形式 Bishop 曲面 M 映到由如下方程定义的另一个 Bishop 曲面：

$$\begin{aligned} w' &= H^*(z',\overline{z'}) \\ &= z'\overline{z'} + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{j=s}^{N+1} b_j z'^j\right) + E^*_{N+2}(z',\overline{z'}), \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

这里 $E^*_{N+2} = O\big(|z|^{N+2}\big)$, $a_j = b_j$ 对于 $s \leq j \leq N$，以及

$$b_{N+1} = 0, \quad 如果\ N+1 = 0, 1 \bmod s.$$

进一步，当 $N+1 \neq 0, 1 \bmod s$ 时，$wt_{\mathrm{nor}}(f) \geq N$ 且 $wt_{\mathrm{nor}}(g) \geq N+1$；当 $N = ts$ 时，$wt_{\mathrm{nor}}(f) \geq 2t$, $wt_{\mathrm{nor}}(g) \geq 2t+1$；且当 $N = ts-1$ 时，$wt_{\mathrm{nor}}(f) \geq 2t-1$, $wt_{\mathrm{nor}}(g) \geq 2t$.

在证明定理之前，回顾一下 Moser 的一个结果，这个结果在我们的证明中将会被用到. 对任意的 $m \geq 4$ 和全纯多项式

$$f^{(m-1)}_{\mathrm{nor}}(z,w),\ g^{(m)}_{\mathrm{nor}}(z,w),\ \phi^{(m)}(z),$$

我们定义如下的一个算子：

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(f^{(m-1)}_{\mathrm{nor}}(z,w), g^{(m)}_{\mathrm{nor}}(z,w), \phi^{(m)}(z)) \\ &\quad := g^{(m)}_{\mathrm{nor}}(z,z\overline{z}) - 2\mathrm{Re}\big(\overline{z} f^{(m-1)}_{\mathrm{nor}}(z,z\overline{z}) + \phi^{(m)}(z)\big). \end{aligned}$$

称这个算子为 **Moser 算子**. 下面的引理本质上是 [Mos85] 命题 2.1 的内容：

引理 2.2.1 假设 $G(z,\overline{z})$ 是一个次数为 m 的齐次多项式. 如果 $f_{\mathrm{nor}}^{(m-1)}$ 满足正规型条件: $f_{\mathrm{nor}}^{(m-1)}=z^2f^*$, 且 f^* 是一个全纯多项式, 那么

$$\mathcal{L}\big(f_{\mathrm{nor}}^{(m-1)}(z,w),g_{\mathrm{nor}}^{(m)}(z,w),\phi^{(m)}(z)\big)=G(z,\overline{z})$$

有唯一解 $\{f_{\mathrm{nor}}^{(m-1)}(z,w),g_{\mathrm{nor}}^{(m)}(z,w),\phi^{(m)}\}$. 进一步, 如果 G 没有调和项, 那么

$$\mathcal{L}\left(f_{\mathrm{nor}}^{(m-1)}(z,w),g_{\mathrm{nor}}^{(m)}(z,w),0\right)=G(z,\overline{z})$$

在上面的正规型条件下, 有唯一解 $\left\{f_{\mathrm{nor}}^{(m-1)}(z,w),g_{\mathrm{nor}}^{(m)}(z,w)\right\}$.

下面我们用与上节中类似的归纳法来证明定理 2.2.1.

定理 2.2.1 的证明 分三步来证明:

第一步 首先证明存在如下的多项式映射:

$$z'=z+f_{\mathrm{nor}}^{(N)}(z,w),\quad w'=w+g_{\mathrm{nor}}^{(N+1)}(z,w),$$

它把 M 映射到由如下方程定义的曲面:

$$w=z\overline{z}+2\mathrm{Re}\left(\sum_{j=s}^{N+1}b_jz^j\right)+E_{N+2}^*(z,\overline{z}),\tag{2.2.4}$$

其中 $b_j=a_j$ 对于 $s\le j\le N$. 把上面的映射代入 (2.2.4) 并且合并 degree 为 $N+1$ 的项, 可以看到映射的存在性等价于下述方程解的存在性:

$$\mathcal{L}\big(f_{\mathrm{nor}}^{(N)}(z,w),g_{\mathrm{nor}}^{(N+1)}(z,w),b_{N+1}z^{N+1}\big)=-E_{N+1}^{(N+1)}(z,\overline{z}).\tag{2.2.5}$$

由引理 2.2.1, 我们知道 (2.2.5) 确实可解且在引理 2.2.1的正规性条件下唯一可解.

在接下来的定理证明中, 我们总是假设

$$E_{N+1}=2\mathrm{Re}(b_{N+1}z^{N+1})+o(|z|^{N+1}).$$

第二步 在这一步里, 假设 $N+1=1 \bmod s$, 并记 $N=ts$. 现在证明存在如下形式的一个多项式映射:

$$\left.\begin{aligned}z'&=z+\sum_{l=0}^{N-2t}f^{(2t+l)}(z,w),\\ w'&=w+\sum_{\tau=0}^{N+1-2t-2}g_{\mathrm{nor}}^{(2t+2+\tau)}(w),\end{aligned}\right\}\tag{2.2.6}$$

使得在这个变换下，M 被映到由形如方程 (2.2.3) 在 $b_{N+1}=0$ 时定义的形式曲面 M' . 如果对所有 $f^{(j)}$ 且 $2t<j\le N+1$ 加上引理 2.2.1中的正规型条件，那么上述映射有唯一解.

如同在第一步，这就要求我们研究一系列在正规意义下加权的齐次函数方程，这里权从 $2t$ 到 $N+1$. 把方程 (2.2.6) 代入 (2.2.3) 且合并 degree 为 $2t+1$ 的项，我们得到方程 (2.1.12) 有如下解:

$$f_{\rm nor}^{(2t)}(z,w)=aw^t-\bar{a}z^2w^{t-1},$$

这里 a 将在后面唯一决定.

现在，假设已经对 $2t+l=2t,\cdots,m-1\le st-2$，解出了 $f_{\rm nor}^{(2t+l)},g_{\rm nor}^{(2t+1+l)}$. 把 (2.2.6) 代入 (2.2.3)，然后合并 degree 为 $m+1$ 的项，如同引理 2.1.2 的证明，我们得到一个类似于 (2.1.20) 的方程:

$$g^{(m+1)}(z\bar{z})=\bar{z}f_{\rm nor}^{(m)}(z,z\bar{z})+z\overline{f_{\rm nor}^{(m)}(z,z\bar{z})}+\hat{\mathbb{P}}_{ts+2}^{m+1}. \tag{2.2.7}$$

注意到 $\hat{\mathbb{P}}_{ts+2}^{m+1}(\in\mathbb{P}_{ts+2}^{m+1})$ 是一个实值多项式且由已知条件唯一决定. 这个方程用 Moser 算子可以写成如下形式:

$$\mathcal{L}\left(f_{\rm nor}^{(m)}(z,z\bar{z}),g^{(m+1)}(z\bar{z}),0\right)=\hat{\mathbb{P}}_{ts+2}^{m+1}. \tag{2.2.8}$$

因为 $\hat{\mathbb{P}}_{ts+2}^{m+1}$ 取实值且被 z 整除，它不含有任何调和项. 由引理 2.2.1，它可解且在引理 2.2.1 的正规型条件下唯一可解. 由归纳法，可以对 $m\le ts-1$，唯一地求解 $f_{\rm nor}^{(m)},g_{\rm nor}^{(m+1)}$. 把 (2.2.6) 代入 (2.2.3)，然后合并 degree 为 $m=ts+1$ 的项，我们得到一个类似于 (2.1.42) 的方程并把它重写成如下形式:

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}\big(g_{\rm nor}^{(ts+1)}(z\bar{z}),f_{\rm nor}^{(ts)}(z,z\bar{z}),0\big)\\&\quad=2{\rm Re}\big[\bar{a}(1-s)^tz^{ts+1}\big]+\hat{\mathbb{P}}_{ts+2}^{ts+1}-a(1-s)^t\overline{z}^{ts+1}\\&\qquad-2{\rm Re}(b_{ts+1}z^{ts+1}).\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

如同定理 2.1.1的证明，实值齐次多项式 $\widehat{\mathbb{P}_{ts+2}^{ts+1}-a(1-s)^t\overline{z}^{ts+1}}$ 有 z 因子，从而不含有调和项. 因此，如果选取 $a=\overline{b_{ts+1}}/(1-s)^t$，那么 (2.2.9) 在引理 2.2.1 的正规型条件下有唯一解. 这就完成了在这一步证明中的断言.

第三步 在这一步中，假设 $N+1=0 \mod s$，并记 $N=(t+1)s-1$. 我们将证明存在唯一如下形式的多项式映射：

$$\left.\begin{aligned} z' &= z + \sum_{l=0}^{N-1-2t} f_{\mathrm{nor}}^{(2t+l+1)}(z,w), \\ w' &= w + \sum_{\tau=0}^{N+1-2t-2} g_{\mathrm{nor}}^{(2t+2+\tau)}(w), \end{aligned}\right\} \tag{2.2.10}$$

使得在这个变换下，M 被映到由方程 (2.2.3) 在 $b_{N+1}=0$ 时定义的形式曲面 M'. 这里，$f_{\mathrm{nor}}^{(m)}$ 对所有的 $m \neq 2t+1$ 满足引理 2.2.1中的正规型条件.

这一步中的讨论与第二步中的研究方法类似. 把 (2.2.10) 代入 (2.2.3) 且合并 degree 为 $2t+2$ 的项，可得方程 (2.1.44)，它有如下形式的解：

$$f_{\mathrm{nor}}^{(2t+1)}(z,w) = bzw^t, \quad g_{\mathrm{nor}}^{(2t+2)}(w) = (b+\bar{b})w^{t+1},$$

其中 b 将在后面唯一决定. 同第二步中一样地讨论，对所有 $2t+l=2t+2,\cdots,<st+s-1$，可以归纳地找到一个满足正规型条件的唯一解 $f_{\mathrm{nor}}^{(2t+l)}, g_{\mathrm{nor}}^{(2t+1+l)}$. 合并 degree 为 $ts+s$ 的项，可以得到如下的方程：

$$\begin{aligned} &2\mathrm{Re}(b_{N+1}z^{N+1}) + g_{\mathrm{nor}}^{(ts+s)}(z\bar{z}) \\ &\quad = \big((s-1)b-\bar{b}\big)(1-s)^t z^{ts+s} + \hat{\mathbb{P}}_{ts+s+1}^{ts+s} \\ &\qquad + \bar{z}f^{(ts+s-1)}(z,z\bar{z}) + z\overline{f^{(ts+s-1)}(z,z\bar{z})}. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

同第二步类似地讨论，当 $f_{\mathrm{nor}}^{(ts+s-1)}$ 满足引理 2.2.1 中的正规化条件时，方程 (2.2.11) 唯一可解当且仅当 $(s-1)b-\bar{b}=b_{N+1}$.

现在，定理 2.2.1 中的映射在 $N+1 \neq 0, 1 \mod s$ 时可以用第一步中的方法选取，然后分别复合第二步或第三步中的映射，就可以得到定理 2.2.1 的证明. 进一步，用上述固定程序以及上述步骤中的正规化条件，存在一个整体的多项式 $\{P_{kl}(a_{\alpha\beta})\}_{1\leq\alpha+\beta\leq k+l}$ (只依赖于 s 和 N)，使得定理 2.2.1 中的映射 $(z',w')=(z,w)+(f,g)=(z,w)+\sum_{k,l} b_{kl}z^k w^l$ 满足

$$b_{kl} = P_{kl}(a_{\alpha\beta}), \quad 1 \leq \alpha+\beta \leq k+l, \tag{2.2.12}$$

这里 $H=\sum_{\alpha,\beta\geq 0}a_{\alpha\beta}z^{\alpha}\overline{z}^{\beta}$.

至于定理 2.2.1 中次数的估计，可以从存在性证明的过程中得到. ■

现在我们选取定理 2.2.1 中的映射

$$z'=z+f,\quad w'=w+g,$$

使得它的系数由 (2.2.12) 决定. 假设 $z=z'+f^*(z',w')$ 和 $w=w'+g^*(z',w')$ 是它的反变换. 注意到 (f^*,g^*) 在它们直到一个特定的 degree (比如说 m) 的 Taylor 展开系数都是 (f,g) 中至多到 m 次系数的全局多项式函数. 因此对于 M^* 的定义函数，即 M 的像，我们有如下形式：

$$w'+g^*(z',w')=H\big(z'+f^*(z',w'),\overline{z'+f^*(z',w')}\big).$$

利用隐函数定理来求解 w' 并且由图像函数的唯一性，可以得到 H^* 直到 degree m 的 Taylor 展开系数一定是 H 的 Taylor 展开系数中 degree 不超过 m 的 Taylor 展开系数的多项式函数. 归纳地重复这样一个从 M 到 M^* 的正规化过程，能够得到如下定理 (唯一性由定理 2.1.1 可得)：

定理 2.2.2 假设 M 是一个由下述方程定义的形式 Bishop 曲面：

$$w=H(z,\overline{z})=z\overline{z}+z^s+\overline{z}^s+E(z,\overline{z}),\tag{2.2.13}$$

其中 $s\geq 3$ 是一个整数，且 $E(z,\overline{z})=\sum_{\alpha+\beta\geq s+1}^{\infty}a_{\alpha\beta}z^{\alpha}\overline{z^{\beta}}$. 那么存在唯一一个下面形式的变换：

$$\begin{cases} z'=z+f(z,w), & f(z,w)=O(|w|+|z|^2),\\ w'=w+g(z,w), & g(z,w)=O(|w|^2+|z|^3+|zw|)\end{cases}\tag{2.2.14}$$

把 M 映射到由如下方程定义的形式 Bishop 曲面：

$$\begin{aligned} w'&=H^*_{\bullet}(z',\overline{z'})\\ &=z'\overline{z'}+z'^s+\overline{z'}^s+2\mathrm{Re}\Bigg(\sum_{j=2,\cdots,s-1;\ k\geq 1}^{\infty}\lambda_{ks+j}z'^{ks+j}\Bigg).\end{aligned}\tag{2.2.15}$$

正规型 (2.2.15)，在除去变换 $z''=e^{i\theta}z'$, $w''=w$ 且 $e^{is\theta}=1$ 外，唯一决定 M 的一个等价类. 进一步，存在一个只依赖于 s 的全局多项式函数 $\{\Lambda_{ks+j}(Z_{\alpha\beta})\}_{s+1\le\alpha+\beta\le ks+j;\ j=2,\cdots,s-1;\ k\ge 1}$，使得

$$\lambda_{ks+j}=\Lambda_{ks+j}(a_{\alpha\beta})_{s+1\le\alpha+\beta\le ks+j;\ j=2,\cdots,s-1;\ k\ge 1}. \tag{2.2.16}$$

定理 1.2.1 和推论 1.2.1 的证明 定理 1.2.1 由定理 2.2.2 和引理 2.1.1 (ii) 得到. 推论 1.2.1 (a),(b),(d) 也由定理 2.2.2 易得. 下面证明推论 1.2.1 (c). 首先假设 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{Z}_s$ 的一个真子群. 定义

$$J_G:=\{j:\ 2\le j\le s-1,\ e^{i\theta j}=1,\ \text{对任意}\,(e^{i\theta}z,w)\in\mathcal{G}\}.$$

假设 M_G 由

$$w=z\overline{z}+z^s+\overline{z}^s+2\mathrm{Re}\Big(\sum_{j\in J_G}a_{s+j}z^{s+j}\Big)$$

所定义，其中 $a_{s+j}\neq 0$. 我们将证明 $\mathrm{aut}_0(M_G)=\mathcal{G}$. 为此，记 $\mathcal{G}^*$ 是所有的 ξ 满足变换 $(z,w)\to(\xi z,w)$ 属于 $\mathcal{G}$. 由推论 1.2.1 (a)，只需证明如果对任意的 $j\in J_G$，都有 $\xi^{*s}=1$ 且 $\xi^{*j}=1$，那么 $\xi^*\in\mathcal{G}^*$. 记 $k=|\mathcal{G}^*|$，那么 $s=km$，其中 $m(\in\mathbf{N})>1$. 对任意的 $\xi(\in\mathcal{G}^*)\neq 1$, 因为 ξ 的次数一定整除 k，我们得到 $\xi^k=1$. 因此，$\mathcal{G}^*$ 为 $z^k=1$ 的一个完备解. 现在，我们得到 $J_G=\{k,\cdots,(m-1)k\}$. 因此有 $\xi^{*k}=1$. 这样就有 $\xi^*\in\mathcal{G}^*$. 这样就完成了推论 1.2.1 (c) 的证明. ∎

注 2.2.1 在正规型 (2.2.15) 中，当 $j=0,1,\ k=1,2,\cdots$ 时，$\lambda_{ks+j}=0$ 这一条件在一定程度上类似于强拟凸超曲面中的 Cartan-Chern-Moser 链条件 (参见 [CM74]) (即比较正规型 (2.2.15) 和 (1.1.3)). 在超曲面情形，链条件可以用有限个微分方程组成的方程组来表示. 现在还不知道我们的正规型能否被有限个微分方程组成的方程组来表示.

下述的推论为定理 1.2.1 的一个特殊情形：

推论 2.2.1 假设 M 是一个由下述方程定义的实解析 Bishop 曲面：

$$w=H(z,\overline{z})=z\overline{z}+2\mathrm{Re}\Big(z^s+\sum_{k\ge 1,\ j=2,\cdots,s-1}a_{ks+j}z^{ks+j}\Big),$$

其中有无穷多个 $a_{ks+j}\neq 0$. 那么对任意的 $N>s$, M 不能双全纯等价于由如下方程定义的曲面 M_N:

$$w=H_{(N+1)}(z,\overline{z})=z\overline{z}+2\mathrm{Re}\Bigg(z^s+\sum_{k\geq 1,\ j=2,\cdots,s-1}^{ks+j\leq N}a_{ks+j}z^{ks+j}\Bigg).$$

这里 $H_{(N+1)}$ 是 H 在 0 的 Taylor 展开的 N^{th} 截断函数. 事实上, 当 $N'>N$ 时, $M_{(N+1)}$ 双全纯等价于 $M_{(N'+1)}$ 当且仅当对任意的 $N<ks+j\leq N'$ 都有 $a_{ks+j}=0$.

注 2.2.2 推论 2.2.1 给出了 J.Moser 在他的文章 [p. 399, Mos85] 中提出的第二个问题的一个否定答案.

2.3 具有消失 Bishop 不变量的 Bishop 曲面的代数等价性

作为定理 2.2.2 的一个 (不那么显然的) 应用, 下面证明几乎所有的 Bishop 不变量为 0、Moser 不变量 $s<\infty$ 的 Bishop 曲面不能双全纯等价于 $\mathbb{C}^2$ 中的一个代数曲面. 其证明, 如同 Forstneric 在 [Fo04] 对于 CR 情形的讨论, 主要用到了 Baire 范畴定理. 注意到, 这个现象与非例外椭圆情形的 Bishop 曲面有相当大的不同. 前面已经提到, Moser-Webster 在他们著名的工作 [MW83] 中, 证明了任意具有非消失 Bishop 不变量的椭圆 Bishop 曲面都双全纯等价于一个代数正规型.

定义 $\mathcal{M}_s$ 为所有由方程 (2.2.13) 定义的形式 Bishop 曲面, 即有如下的形式:

$$w=H(z,\overline{z})=z\overline{z}+2\mathrm{Re}(z^s)+\sum_{\alpha+\beta\geq s+1}a_{\alpha\beta}z^{\alpha}\overline{z^{\beta}}. \tag{2.3.1}$$

记 $\mathcal{F}:=\{\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n,\cdots):\ a_j\in\mathbb{C}\}$, 并在其上定义一般的距离函数:

$$\mathrm{dist}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|a_j-b_j|}{2^j(1+|a_j-b_j|)}.$$

我们知道 $\mathcal{F}$ 是一个 Frèchet 空间，并且由前面的定理知道 $\mathcal{M}_s$ 和 $\mathcal{F}$ 间存在一个一对一的映射, 它把每一个 $M \in \mathcal{M}_s$ 都映射到如下的一个元素：$\boldsymbol{M} = (a_{\alpha\beta}) \in \mathcal{F}$，这个元素中的数列用 lexicographical 次序来标记. 因此，我们在下文中把 $\mathcal{M}_s$ 看成是一个 Frèchet 空间. 定义算子 $\mathcal{J}$ 是把所有 $M \in \mathcal{M}_s$ 映射到 $(\lambda_{ks+j})_{j\neq 0,1;\ k\geq 1}$ 的映射，这里 (λ_{sk+j}) 已经在定理 2.2.2 中定义. 由 (2.2.16)，我们易得 $\mathcal{J}$ 是一个从 $\mathcal{M}_s$ 到 $\mathcal{F}$ 的连续映射.

$\mathbb{C}^2$ 中的芽 (M,p) 被称为**代数曲面**，如果 M 在 p 点附近有一个多项式的实值定义函数. 如果 $p \in M$ 是一个椭圆复切点，且在这点的 Bishop 不变量为 0 以及 Moser 不变量 $s < \infty$，那么存在一个双全纯的坐标变换 (参见 [Hu04])，使得 $p = 0$ 且 M 在 0 点附近由如下形式的方程定义：

$$\left.\begin{aligned} w &= z\overline{z} + B(z,\overline{z},w,\overline{w}), \\ B(z,\overline{z},w,\overline{w}) &= \sum_{3\leq \alpha+\beta+2\gamma+2\tau} c_{\alpha\beta\gamma\tau} z^{\alpha}\overline{z}^{\beta} w^{\gamma}\overline{w}^{\tau}, \end{aligned}\right\} \tag{2.3.2}$$

这里，B 是其变量的多项式函数. 用隐函数定理和定理 2.2.1 中第一步的证明，可得存在一个固定的程序把 (2.3.2) 变换成一个由方程 (2.3.1) 定义的曲面，且 (2.3.1) 中的系数 $a_{\alpha\beta}$ 都是 $c_{\alpha\beta\gamma\tau}$ 的多项式函数，$H(z,\overline{z})$ 变成一个 Nash 代数方程. 对于 Nash 代数方程，有如下的定义.

我们称一个定义在 0 点附近的实解析函数 $h(z,\overline{z})$ 是一个 **Nash 代数方程**，如果 $h \equiv 0$ 或存在一个关于 X 不可约的多项式 $P(z,\overline{z};X)$，它的系数是 $(z,\overline{z})$ 的多项式函数，使得

$$P\big(z,\overline{z};h(z,\overline{z})\big) \equiv 0.$$

当然我们总是假设 (z,ξ,X) 在 $P(z,\xi,X)$ 的系数项中，X 的最高次项的最大值为 1. h 的 degree 定义为 P 关于 $(z,\overline{z},X)$ 的完全 degree.

定理 1.2.2 的证明 对于 d, n, $m \geq 1$，我们定义 $\mathcal{A}^d_B(n,m) \subset \mathcal{M}_s$ 是由 (2.3.1) 定义的 Bishop 曲面的子集，满足 $H(z,\overline{z})$ 是一个 Nash 代数方程，(2.3.2) 中的 B 通过前面的程序正规化得到，且 B 的 degree 有上界 d, 同时还满足下面的性质：

Cond(1)　$H(z,\xi)$ 在 $|z|^2+|\xi|^2<1/m^2$ 上全纯;

Cond(2)　$\max_{(|z|^2+|\xi|^2)<1/m^2}|H(z,\xi)|\le n$ 且 $|c_{\alpha\beta\gamma\tau}|\le n$.

定义 $\mathcal{A}_B^d=\cup_{n,m=1}^{\infty}\mathcal{A}_B^d(n,m)$ 以及 $\mathcal{A}_B=\cup_{d=1}^{\infty}\mathcal{A}_B^d$. 由定理 2.2.2 可以得到由 (2.2.13) 定义的 M 形式等价于一个代数曲面当且仅当 $\mathcal{J}(M)\in\mathcal{J}(\mathcal{A}_B)$. (因此，由 (2.2.13) 定义的 M 不能双全纯等价于一个代数曲面当且仅当 $\mathcal{J}(M)\notin\mathcal{J}(\mathcal{A}_B)$.)

现在对任意序列 $\{M_j\}\subset\mathcal{A}_B^d(n,m)$，其中

$$M_j: w=H_j(z,\overline{z})=z\overline{z}+z^s+\overline{z}^s+o(|z|^s),$$

通过正规簇的讨论，且 (若有需要) 可考虑其一个子序列，可以假设在 $\{|z|^2+|\xi|^2<1/m^2\}$ 的任意一个紧子集上都有

$$H_j(z,\xi)\to H_0(z,\overline{z}).$$

我们容易得到由 $w=H_0$ 定义的 M_0 也在 $\mathcal{A}_B^d(n,m)$ 里. 进一步，对任意的 (α,β)，有

$$D_z^\alpha D_\xi^\beta H_j(0)\to D_z^\alpha D_\xi^\beta H_0(0).$$

由 (2.2.16)，$\mathcal{J}(M_j)\to\mathcal{J}(M_0)$ 在 $\mathcal{F}$ 的拓扑意义下. 因此，易得 $\mathcal{J}(\mathcal{A}_B)$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个第一范畴集 (the first category).

接着，对于 $R>0$, 定义

$$\mathcal{S}_R:=\left\{\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_{sk+j})_{k\ge1;\,j=2,\cdots,s-1}:\|\boldsymbol{\lambda}\|_R:=\sum_{ks+j}|\lambda_{ks+j}|R^{ks+j}<\infty\right\}.$$

通过直接的验证可得，$\mathcal{S}_R$ 在上面定义的 $\|\cdot\|_R$-范数下是一个 Banach 空间 (事实上，当 $R=1$ 时，它就退化成标准的 l^1-空间). 现在我们断言 $\mathcal{K}_B^d$ 没有内点，这里 $\mathcal{K}_B^d$ 定义为在上述 Banach 范数下，$\mathcal{J}\left(\mathcal{A}_B^d(n,m)\right)\cap\mathcal{S}_R$ 在 $\mathcal{S}_R$ 中的闭集. 我们用反证法来证明这一断言.

假设存在 $\boldsymbol{a}_0=(\lambda_{sk+j}^0)_{k\ge1;\,j=2,\cdots,s-1}$ 在 $\mathcal{S}_R$ 中的一个 ϵ-ball $\mathcal{B}$ 包含在 $\mathcal{K}_B^d$ 里. 那么就有 $\mathcal{B}\subset\mathcal{J}\left(\mathcal{A}_B^d(n,m)\right)\cap\mathcal{S}_R$. 事实上，对任意的 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{B}$，假定 $\mathcal{J}(M_j)\to\boldsymbol{a}$，其中 $M_j\in\mathcal{A}_B^d(n,m)$. 通过与上段中同样的讨论，不失一般性，可以假定在 $\mathcal{F}$-范数下有

$M_j \to M_0 \in \mathcal{A}_B^d(n,m)$. 现在由 (2.2.16)，可以看出 $\mathcal{J}(M_0)=\boldsymbol{a}$. 选取 $\boldsymbol{a}=\{\lambda_{ks+j}\}$ 使得

$$|\lambda_{ks+j}-\lambda_{ks+j}^0|\cdot(2R)^{ks+j}<\epsilon \text{ 对所有的 } ks+j \text{ 成立.}$$

对任意 $N\geq 1$，存在一个 $H=z\overline{z}+z^s+\overline{z^s}+\sum_{s+1\leq\alpha+\beta}a_{\alpha\beta}z^\alpha\overline{z^\beta}$ 在 0 点附近是 Nash 代数的且满足

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_{ks+j}=\Lambda_{ks+j}(a_{\alpha\beta}),\quad N\geq ks+j\geq s+1,\\&\alpha+\beta\leq ks+j,\quad \Lambda=(\Lambda_{ks+j})_{s+1\leq ks+j\leq N}.\end{aligned}\right\}\tag{2.3.3}$$

这里 H 由 (2.3.2) 中 degree 有上界 d 的 B 通过正规化得到. 因为 $a_{\alpha\beta}$ 是 $c_{\alpha\beta\gamma\tau}$ 的多项式函数，我们从 (2.3.3) 中得到矛盾. 事实上，(2.3.3) 右边的变量由少于 d^4 个自由变量 $(c_{\alpha\beta\gamma\tau})$ 的多项式参数化得到，当 $N\gg 1$ 时，(2.3.3) 的像不能填满 $\mathbb{R}^{N-s}$ 的一个开集.

因此，我们证明了 $\mathcal{A}_B=\cup_{d,n,m=1}^{\infty}\mathcal{A}_B^d(n,m)$ 是 $\mathcal{S}_R$ 中的第一范畴集. 由 Baire 范畴定理，得到 $\mathcal{S}_R$ 中几乎所有的元素不是来自于 $\mathcal{J}(\mathcal{A}_B\cap\mathcal{S}_R)$. 对任意 $\boldsymbol{a}=(\lambda_{sk+j})\notin\mathcal{J}(\mathcal{A}_B\cap\mathcal{S}_R)$，由

$$w=z\overline{z}+z^s+\overline{z}^s+2\mathrm{Re}\Big(\sum_{k\geq 1;\ j\neq 0,1}\lambda_{ks+j}z^{ks+j}\Big)$$

定义的 Bishop 曲面不能全纯等价于 $\mathbb{C}^2$ 中任何一个代数曲面. 让 R 变动时，我们就完成了定理 1.2.2的证明. ■

$\mathbb{C}^2$ 中的一个实解析曲面被称为 **Nash 代数曲面**，如果它能被一个 Nash 代数方程定义. 用类似于上面的方法，我们有如下类似的定理:

定理 2.3.1 *几乎所有定义在 0 点附近的 Bishop 不变量 $\lambda=0$ 且 Moser 不变量 $s<\infty$ 的 Bishop 曲面不能双全纯等价于 $\mathbb{C}^2$ 中的一个 Nash 代数曲面.*

证 要证明定理 2.3.1，我们类似定义 $\mathcal{A}_B^d(n,m)$. 现在，要求

$$H(z,\overline{z})=z\overline{z}+z^s+\overline{z}^s+\sum_{\alpha+\beta\geq s+1}a_{\alpha\beta}z^\alpha\overline{z}^\beta$$

是一个一般的 Nash 代数函数，

$$P(z,\overline{z},X)=\sum b_j(z,\overline{z})X^j=\sum_{\alpha,\beta,\gamma}b_{\alpha\beta\gamma}z^\alpha\overline{z}^\beta X^\gamma$$

是 H 的一个极小多项式，其 degree 不超过 d，且满足下列两个性质：

Cond(1) $H(z,\xi)$ 在 $|z|^2+|\xi|^2<1/m^2$ 上全纯；

Cond(2) $\max_{(|z|^2+|\xi|^2)<1/m^2}|H(z,\xi)|\le n$ 且 $|b_{\alpha\beta\gamma}|\le n$.

固定一个 H_0 和它的极小多项式 $P_0(z,\overline{z};X)$. (我们将要求极小多项式 P_0 关于 X 的首项系数是 1, 使这个多项式唯一.)

假设 $\mathcal{A}^d_B(n,m;H_0,\delta)$ 是 $\mathcal{A}^d_B(n,m)$ 的一个子集，其中 $M=\{w=H(z,\overline{z})\}\in\mathcal{A}^d_B(n,m;H_0,\delta)$ 当且仅当 $|b_{\alpha\beta\gamma}-b^0_{\alpha\beta\gamma}|\le\delta$. 这里 $P=\sum b_{\alpha\beta\gamma}z^\alpha\overline{z}^\beta X^\gamma$，$P_0=\sum b^0_{\alpha\beta\gamma}z^\alpha\overline{z}^\beta X^\gamma$ 分别是 H 和 H_0 的极小多项式. 我们假设 P 已经用 P_0 同样的方式进行了正规化. (当 $\delta\ll 1$ 时，总可以这样做.)

考虑一个 H 和极小多项式关于 $\mathcal{A}^d_B(n,m;H_0,\delta)$ 中一个元素的极小多项式 P. 定义 R 为 P 和 P'_X 关于 X 的 resultant. 我们知道，R 是关于 $(z,\overline{z})$ 的次数有上界 $C_1(d)$ 的非零多项式，这里 $C_1(d)$ 是一个只依赖于 d 的常数. 记 $H=H^*_{(N)}+H^{**}_N$，其中 $H^*_{(N)}$ 是 H 的 Taylor 展开中次数直到 $N-1$ 的项且 H^{**}_N 是它的余项. 那么从 $P(z,\overline{z},H^*_{(N)}+H^{**}_N)=0$，我们得到

$$P^{**}(z,\overline{z},X^{**})=0,\quad 其中\ X^{**}=H^{**}_N. \tag{2.3.4}$$

这里 P^{**} 是一个 degree 上界为 $C_2(d,N)$ 的多项式, 且 $C_2(d,N)$ 是一个只依赖于 d 和 N 的常数，并且 P^{**} 的系数由 P 和 $H^*_{(N)}$ 的系数多项式决定. 注意到

$$D_{X^{**}}\big(P^{**}(z,\overline{z},X^{**})\big)\big|_{X^{**}=0}=D_X\big(P(z,\overline{z},X)\big)_{X=H^*_{(N)}}.$$

因为存在多项式 G_1 和 G_2 使得 $G_1P+G_2P'_X=R$，并且有

$$P(z,\overline{z},H^*_{(N)})=o(|z|^N),$$

所以可以得到 $P'_X(z,\overline{z},H^*_{(N)})$ 的最低消失阶 k_0 有上界 $C_1(d)$，而且它只依赖于 d.

选取一个 $N\ge C_1(d)$ 和一个足够小的正数 δ，在 (2.3.4) 中用比较系数的方法可以得到，对任意满足 $\alpha_0+\beta_0\ge N$ 的 $a_{\alpha_0\beta_0}$ 都被至多 $C(k_0,N)$ 个以 $b_{\alpha\beta\gamma}$ 和所有 $\alpha+\beta\le N-1$ 的 $a_{\alpha\beta}$ 为变量的有

理多项式所决定，其中，$C(k_0,N)$ 只依赖于 k_0 和 N. 对于 (2.3.3)，可以用相同的方法证明 $\mathcal{J}(\mathcal{A}_B^d(n,m;H_0,\delta))\cap\mathcal{S}_R$ 在 $\mathcal{S}_R$ 中的闭包是一个空集. 容易看出，$\mathcal{J}(\mathcal{A}_B)$ 能被写成可数个这样的集合的并，所以 $\mathcal{J}(\mathcal{A}_B)$ 是 $\mathcal{S}_R$ 中的第一范畴集. 这样，就证明了定理 2.3.1. ■

注 2.3.1 定理 2.3.1 成立的关键在于 Bishop 常数为 0 且 Moser 常数 $s<\infty$ 的 Bishop 曲面的模空间被一个无穷维空间参数化. 因此，$\mathcal{M}_s$ 的任意子集，即能被 $\mathcal{M}_s$ 的可数个有限维子空间的并表示的子集，在等价关系下是 $\mathcal{M}_s$ 的一个薄集. 无穷维空间的模空间的元素一般说来不能代数等价，这个思想可追溯到 Poincaré[Po1907] 早期的工作. 在 CR 情形，Forstneric 在 [Fo04] 中利用 CR 流形的模空间维数的无穷性和 Baire 范畴定理，简洁地证明了复空间中几乎所有的 CR 子流形不能全纯等价于任何代数流形. 然而要具体给出一个与代数曲面不双全纯等价的曲面，并不是一件容易的事. Baouendi-Ebenfelt-Rothchild 在 [BER04b] 中给出了 $\mathbb{C}^2$ 中一个非常退化的超曲面，它不能与任何代数曲面等价；Huang-Ji-Yau 在 [HJY01] 中首先给出了一个具体的简单实解析的强拟凸超曲面，它不能与代数曲面双全纯等价. 关于 CR 流形的不代数等价性，可参见 [BER00b], [Hu01], [Ji02].

然而，利用 Huang-Krantz[HK95] 和 Huang[Hu98] 的工作，一个 Bishop 曲面在一个椭圆点总能全纯变换到一个 Levi 平坦超曲面 $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$，同时也能映到 $\mathbb{C}^2$ 中的 Heisenberg 超曲面.

第三章 具有消失 Bishop 不变量的 Bishop 曲面的双曲几何和等价分类问题

在这一章里，我们研究第二章中形式正规化映射的收敛性问题. 我们的出发点是 Huang-Krantz 在 [HK95] 一文中的平坦化定理，由此构造了贴于所研究曲面上的一簇全纯圆盘，进而建立了此曲面上的双曲几何. 然后利用曲面上的这一双曲几何，特别是在分支点及其组成的双曲多边形上的几何性质，最终给出了两个 Bishop 不变量为 0 的 Bishop 椭圆曲面全纯等价的一个充要条件，从而解决了此类曲面的双全纯等价分类问题.

3.1 具有消失 Bishop 不变量的 Bishop 曲面上的双曲几何性质

为研究收敛性问题，考虑由如下方程定义的实解析 Bishop 曲面 M：

$$w = z\bar{z} + z^s + \bar{z}^s + E(z,\bar{z}), \quad E(z,\bar{z}) = \overline{E(z,\bar{z})} = o(|z|^s), \quad 3 \le s < \infty. \tag{3.1.1}$$

由 [HK95] 中的平坦化定理，任意 Bishop 不变量为 0 的 Bishop 曲面总可以写成如上的形式.

如同 Moser-Webster 在 [MW83] 中的讨论，我们考虑 M 的复化曲面 $\mathfrak{M}$，它在 $0 \in \mathbb{C}^4$ 附近是由下述方程定义的复曲面：

$$\begin{cases} w = z\zeta + z^s + \zeta^s + E(z,\zeta), \\ \eta = z\zeta + z^s + \zeta^s + E(z,\zeta). \end{cases} \tag{3.1.2}$$

我们定义投影映射 $\pi: \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ ，它把 $(z,\zeta,w,\eta)\in\mathfrak{M}$ 投影到 (z,w). 那么 π 一般说来是一个 s 个点到 1 个点的投影. 记 B 为 π 的分支点 (branching locus). 即 $(z,w)\in B$ 当且仅当 $\exists(\zeta_0,\eta_0)$ 使得 $(z,\zeta_0,w,\eta_0)\in\mathfrak{M}$ 且 π 在 (z,ζ_0,w,η_0) 附近不是双全纯映射. 记 $\mathfrak{B}=\pi^{-1}(B)$. 那么

$$
\begin{aligned}
(z,w)\in B \Longleftrightarrow \exists\zeta,\ \text{使得 } w = z\zeta + z^s + \zeta^s + E(z,\zeta),\\
\text{且 } z + s\zeta^{s-1} + E_\zeta(z,\zeta) = 0\\
\Longleftrightarrow \sharp\{\pi^{-1}(z,w)\} < s.
\end{aligned}
$$

容易看出在 0 点附近，B 是一个过原点的全纯曲线.

现在，假设 M' 在 0 点附近由

$$w' = z'\overline{z'} + z'^s + \overline{z'}^s + E^*(z',\overline{z'})$$

所定义，这里 $E^*(z',\overline{z'}) = \overline{E^*(z',\overline{z'})}$. 记 $\mathfrak{M}'$ 为 M' 的复化空间. 假设 $F:(M,0)\longrightarrow(M',0)$ 是一个双全纯映射. 那么 F 诱导一个从 $(\mathfrak{M},0)$ 到 $(\mathfrak{M}',0)$ 的双全纯映射 $\mathcal{F}$ 使得 $\pi'\circ\mathcal{F} = F\circ\pi$. 从这个关系里，可以得出 $F(B)=B'$，这里 B' 是原点附近 π' 的分支点.

现在给出 B 在 0 点附近的一个准确定义. 从方程

$$z + s\zeta^{s-1} + E_\zeta(z,\zeta) = 0,$$

可以利用隐函数定理得到

$$z = h_1(\zeta) = -s\zeta^{s-1} + o(\zeta^{s-1}), \tag{3.1.3}$$

其中 $h_1(\zeta)$ 是 0 点附近的一全纯函数. 把 (3.1.3) 代入 (3.1.2), 得到

$$w = h_2(\zeta) = (1-s)\zeta^s + o(\zeta^s). \tag{3.1.4}$$

由 (3.1.4)，有

$$-\frac{w}{s-1} = (h_3(\zeta))^s,\quad \text{其中 } h_3(\zeta) = \zeta + o(\zeta).$$

因此，

$$
\left.
\begin{aligned}
\zeta &= h_3^{-1}\left(\left(-\frac{w}{s-1}\right)^{\frac{1}{s}}\right)\\
&= (-1)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{1}{s-1}\right)^{\frac{1}{s}} w^{\frac{1}{s}} + o(w^{\frac{1}{s}}),\\
z &= h_1\left((-1)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{w}{s-1}\right)^{\frac{1}{s}} + o(w^{\frac{1}{s}})\right)\\
&= s(-1)^{-\frac{1}{s}} w^{\frac{s-1}{s}}\cdot(s-1)^{\frac{1-s}{s}} + o(w^{\frac{s-1}{s}}),
\end{aligned}
\right\} \tag{3.1.5}
$$

这里，h_j 是 0 点附近的全纯函数. 记 $w = u \geq 0$，并且定义

$$\begin{aligned} A_j(u) &= h_1 \circ h_3^{-1}\left(\mathrm{e}^{-\frac{(2j+1)\pi\sqrt{-1}}{s}}\left(\frac{u}{s-1}\right)^{1/s}\right) \\ &= s\mathrm{e}^{\frac{(1+2j)\pi\sqrt{-1}}{s}} u^{\frac{s-1}{s}} \cdot (s-1)^{\frac{1-s}{s}} + o(u^{\frac{s-1}{s}}), \\ &\qquad j = 0, 1, \cdots, s-1. \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

引理 3.1.1　对所有的 $0 < u \ll 1$，$A_j(u) \in D(u)$，这里

$$D(u) = \left\{z \in \mathbb{C}^1 : w = z\bar{z} + z^s + \bar{z}^s + E(z, \bar{z}) < u\right\}.$$

证　引理的证明可以由下面的估计得到:

$$|A_j(u)|^2 + \mathrm{Re}\big(2A_j^s(u) + E(A_j(u), \overline{A_j(u)})\big) = O(u^{\frac{2(s-1)}{s}}) \ll u$$

对所有的 $0 < u \ll 1$ 且 $s \geq 3$ 成立. ■

下面的事实将在后面的证明中起到非常关键性的作用:

$\{(A_j(u), u)\}_{j=0}^{s-1} = B \cap \{w = u\}$，且对任意固定的 j, $A_j(u)$ 是 $u^{1/s}$ 的实解析函数.

考虑 $\mathbb{C}^2$ 中的曲面 (M, p). 我们称 M 在 p **点附近由复值函数** ρ **所定义**，如果 M 在 p 点附近恰为 ρ 的零点，且 $\{\mathrm{Re}(\rho), \mathrm{Im}(\rho)\}$ 作为 (x, y, u, v) 的函数，在 p 点附近有常秩 2. 对于一个由 ρ 定义的曲面 (M, p) 和一个从 p 点的邻域到 p' 点的邻域的全纯映射 F，我们说 $F(M)$ 在 p' 点与由 $\rho^* = 0$ 定义的曲面 (M^*, p') 有 m **次近似**，如果存在 p' 点的光滑函数 h_1 和 h_2 且 $|h_1|^2 - |h_2|^2 \neq 0$，使得

$$\rho \circ F^{-1}(Z) = h_1 \cdot \rho^* + h_2 \cdot \overline{\rho^*} + o(|Z - p'|^m).$$

引理 3.1.2　假设 M, M' 是如上定义的 0 点附近的 Bishop 曲面. 如果 $F(M)$ 在 0 点与 M' 有 $\widetilde{N} = Ns + s - 1$ $(N > 1)$ 次近似，那么

$$|F(A_j(u), u) - (A'_j(u'), u')| \lesssim |u|^N$$

对所有的 $j = 0, \cdots, s-1$, $u > 0$ 成立，其中 $F = (z + f, w + g)$ 是一个全纯映射且满足 $f = O(|w| + |z|^2)$, $g(z, w) = g(w) = O(w^2)$ 以及 $u' = u + g(u)$.

证 假设 Φ_1 是一个双全纯映射，它把 M 映到如下定义的 $M_{\rm nor}^N$：

$$w = z\bar{z} + 2{\rm Re}\Big(z^s + \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=2}^{s-1} a_{ks+j} z^{ks+j}\Big) + o\big(|z|^{sN+s-1}\big),$$

记 Φ_2 是一个双全纯映射，它把 M' 映到如下定义的 ${M'}_{\rm nor}^N$：

$$w' = z'\overline{z'} + 2{\rm Re}\Big({z'}^s + \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=2}^{s-1} {a'}_{ks+j} {z'}^{ks+j}\Big) + o\big(|z'|^{sN+s-1}\big).$$

定义 $\Psi = \Phi_2 \circ F \circ \Phi_1^{-1}$，这里假设 Φ_1, Φ_2 在 0 点满足定理 2.2.1 中的正规化条件. 那么 $\Psi(M_{\rm nor}^N)$ 与 ${M'}_{\rm nor}^N$ 有 $\widetilde{N}$ 次近似.

由定理 2.1.1，得：对 $ks+j \leq \widetilde{N} = Ns+s-1$，有

$$a_{ks+j} = a'_{ks+j} \text{ 和 } \Psi = {\rm Id} + O(|(z,w)|^N) \tag{3.1.7}$$

成立. 在本章下文中，我们总是记 $A_j(u), A_j^*(u), A_j^{\rm nor}(u), A_j^{*\rm nor}(u)$ 分别为对应于 $M, M', M_{\rm nor}^N, {M'}_{\rm nor}^N$，如同 (3.1.6) 那样定义的函数. 并记 $h_j^{\rm nor}$ 和 $h_j^{*\rm nor}$ 分别为对应于 $M_{\rm nor}^N$ 和 ${M'}_{\rm nor}^N$，如前面所定义的全纯函数. 由这些方程的定义过程，结合 (3.1.7) 和隐函数定理，可以得到

$$h_j^{\rm nor}(\zeta) = h_j^{*\rm nor}(\zeta) + O(|\zeta|^N) \text{ 对 } j=1,2,3 \text{ 成立.}$$

因此

$$A_j^{\rm nor}(u) = A_j^{*\rm nor}\big(u + \widetilde{g}(u)\big) + O(u^N),$$

其中 $\Psi = \big(z + \widetilde{f}(z), w + \widetilde{g}(w)\big)$. 这样马上可以得到

$$F\big(A_j(u), u\big) = \big(A_j^*(u'), u'\big) + O(u^N),$$

其中 $u' = u + g(u)$，$F = \big(z + f(z,w), w + g(w)\big)$. ∎

对前面的工作进行归纳，已经得到：

命题 3.1.1 (1) 假设存在一个全纯函数 $F: M \longrightarrow M'$ 满足

$$F = (z,w) + \big(O(|w| + |z|^2), O(w^2)\big),$$

使得 $F(M)$ 与 M' 在 0 点有 $\widetilde{N} = Ns+s-1 > s$ 次近似. 那么

$$A_j^*(u + g(u)) = A_j(u) + O(u^N), \quad j = 0, 1, \cdots, s-1, \ u > 0.$$

(2) 假设 $F: M \longrightarrow M'$ 是一个满足

$$F = (z, w) + \big(O(|w| + |z|^2), O(w^2)\big)$$

的形式幂级数变换. 那么 $A_j^*(u + g(u)) = f(A_j(u), u)$ 在形式幂级数的意义下成立. 更确切地说, 假设 $f_{(\widetilde{N})}, g_{(\widetilde{N})}$ 分别是 f 和 g 的 $\widetilde{N} - 1$ 次截断, 那么

$$A_j^*\big(u + g_{(\widetilde{N})}(u)\big) - f_{(\widetilde{N})}\big(A_j(u), u\big) = O(u^{N'}),$$

这里当 $N \to \infty$ 时 $N' \to \infty$. 事实上, 可以选取 $N' = N$.

记 $u = r^2$，并假设 $z = r\sigma(\tau, r)$ 是一个从圆盘

$$r\Delta := \{\tau \in \mathbb{C} : \ |\tau| < r\}$$

到 $D(u)$ 的共形变换，满足 $\sigma(0, r) = 0$, $\sigma'_\tau(0, r) > 0$. 这里，如同前面所定义的那样，

$$D(u) = \{z \in \mathbb{C}^1 : z\bar{z} + z^s + \bar{z}^s + E(z, \bar{z}) < u = r^2\}.$$

同样，假设 $z = r\sigma^*(\tau^*, r)$ 是一个从圆盘 $r\Delta$ 到 $D^*(u)$ 的共形变换，满足 $\sigma^*(0, r) = 0$, ${\sigma^*}'_\tau(0, r) > 0$. 这里，

$$D^*(u) = \{z \in \mathbb{C}^1 : z\bar{z} + z^s + \bar{z}^s + E^*(z, \bar{z}) < u = r^2\}.$$

那么我们知道 $\sigma(\tau, r) = \tau(1 + O(r))$ 且 σ 关于 (τ, r) 在 $\Delta_{1+\varepsilon} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ (这里 $0 < \varepsilon \ll 1$) 上实解析 (参见 [Hu94] 中引理 4.1，或更一般的情况 [Hu98] 中引理 2.1). 对于 σ^*，有同样的性质.

假设 $\tau_j(u) \in \Delta$ 使得 $r\sigma(\tau_j(u), r) = A_j(u)$. 那么

$$\tau_j(u) = \sigma^{-1}\Big(\frac{A_j(u)}{u^{\frac{1}{2}}}, \sqrt{u}\Big) = \frac{A_j(u)}{u^{\frac{1}{2}}}\big(1 + O(\sqrt{u})\big).$$

注意到

$$\frac{A_j(u)}{u^{\frac{1}{2}}} = \sum_{l=s-2}^{\infty} C_{l,j} u^{\frac{l}{2s}},$$

即 $\frac{A_j(u)}{u^{\frac{1}{2}}}$ 关于 $u^{\frac{1}{2s}}$ 实解析，这里

$$C_{s-2,j} = s(s-1)^{\frac{1-s}{s}} e^{\frac{\pi\sqrt{-1}(1+2j)}{s}}. \tag{3.1.8}$$

这样，$A_1(u)$ 和 $A_2(u)$ 作为 $D(u)$ 中点的双曲距离与 τ_1 和 τ_2 作为 Δ 中点的距离相同. 记 $L_{1(j+1)}(u) = \mathrm{e}^{d_{\mathrm{hyp}}(\tau_0,\tau_j)} - 1$. 特别地，$L_{12}(u) = \mathrm{e}^{d_{\mathrm{hyp}}(\tau_0,\tau_1)} - 1$. 因为

$$d_{\mathrm{hyp}}(\tau_0,\tau_1) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\left|\dfrac{\tau_0-\tau_1}{1-\overline{\tau_0}\tau_1}\right|}{1-\left|\dfrac{\tau_0-\tau_1}{1-\overline{\tau_0}\tau_1}\right|}\right),$$

且

$$L_{12}(u) = s(s-1)^{\frac{1-s}{s}}\left|\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{-1}\pi}{s}} - \mathrm{e}^{\frac{3\sqrt{-1}\pi}{s}}\right|u^{\frac{s-2}{2s}} + o(u^{\frac{s-2}{2s}}),$$

我们有 $L_{12}(u)$ 关于 $u^{\frac{1}{2s}}$ 实解析.

下面，假设 $F: M \longrightarrow M'$ 是一个双全纯映射且满足

$$F = (\widetilde{f},\widetilde{g}) = (z,w) + \big(O(|w|+|z|^2), O(w^2)\big).$$

那么 $\widetilde{f} = z + f$ 是一个从 $D(u)$ 到 $D^*(u')$ 的共形映照且满足

$$u' = u + g(u).$$

由于 $F\big(A_j(u),u\big) = \big(A_j^*(u'),u'\big)$，所以 $A_1(u)$ 和 $A_2(u)$ 间的双曲距离与 $A_1^*(u')$ 和 $A_2^*(u')$ 间的双曲距离相同.

现在，假设 F 是一个满足

$$F = (\widetilde{f},\widetilde{g}) = (z,w) + \big(O(|w|+|z|^2), O(w^2)\big)$$

的双全纯变换，使得 $F(M)$ 与 M' 在 0 点有直到 $\widetilde{N} = Ns+s-1 > s$ 次的近似. 像以前一样，假设 M, M' 已经正规化到次数 $\widetilde{N}$. 那么就有 $F = \mathrm{Id} + O(|z,w|^N)$,

$$M = \big\{w = z\bar{z} + 2\mathrm{Re}(\varphi_0(z)) + o(|z|^{\widetilde{N}})\big\},$$
$$M' = \big\{w = z\bar{z} + 2\mathrm{Re}(\varphi_0(z)) + o(|z|^{\widetilde{N}})\big\},$$

其中 $\varphi_0(z) = z^s + o(z^s)$, $u' = u + g(u) = u + O(|u|^N)$，且

$$\varphi_0^{(sk+j)}(0) = 0 \text{ 对于 } j = 0, 1 \bmod s.$$

从 σ 和 σ^* 的构造过程，可以得到 (参见 [引理 2.1, Hu98])

$$\sigma^*(\tau,u') - \sigma(\tau,u) = \tau O(u^N). \tag{3.1.9}$$

事实上，这个等式可由下面更一般的结果得到.

引理 3.1.3 假设 $\sigma(\xi,r)=\xi\cdot\big(1+O(r)\big)$ 和 $\sigma^*(\xi,r)=\xi\cdot\big(1+O(r)\big)$ 分别为从单位圆盘 Δ 到

$$\left.\begin{aligned} D(r) &:= \{\xi\in\mathbb{C}(\approx\overline{\Delta}):\ |\xi|^2+rF_1(r,\xi,\overline{\xi})<1\},\\ D^*(r) &:= \{\xi\in\mathbb{C}(\approx\overline{\Delta}):\ |\xi|^2+rF_1(r,\xi,\overline{\xi})+r^mF_2(r,\xi,\overline{\xi})<1\} \end{aligned}\right\} \tag{3.1.10}$$

的双全纯映射，这里 $F_j(r,\xi,\overline{\xi})$ 是 $\{0\}\times\overline{\Delta}\times\overline{\Delta}$ 的一个邻域的实解析函数. 那么存在一个常数 C，只依赖于 F_j，使得

$$\big|\sigma^*(\xi,r)-\sigma(\xi,r)\big|\le C|\xi|r^m,\quad \xi\in\overline{\Delta}.$$

证 从 σ 和 σ^* 的构造过程 (参见 [引理 2.1, Hu98]) 我们知道，对于 $0<\epsilon_0\ll 1$，存在 $U,U^*\in C^\omega(\partial\Delta\times(-\epsilon_0,\epsilon_0))$ 使得

$$\begin{aligned} \sigma(\xi,r) &= \xi\,(1+U(\xi,r)+\mathcal{H}(U(\cdot,r))),\\ \sigma^*(\xi,r) &= \xi\,(1+U^*(\xi,r)+\mathcal{H}(U^*(\cdot,r))), \end{aligned}\qquad \xi\in\partial\Delta,$$

其中 $\mathcal{H}$ 为标准的 Hilbert 变换，且 U,U^* 满足下面的方程:

$$\begin{aligned} U &= G_1\big(r,\xi,U,\mathcal{H}(U)\big),\\ U^* &= G_1\big(r,\xi,U^*,\mathcal{H}(U^*)\big)+r^mG_2\big(r,\xi,U^*,\mathcal{H}(U^*)\big), \end{aligned}$$

这里 $G_j(r,\xi,x,y)$ 关于 (r,ξ,x,y) 实解析且满足 $G_j\lesssim|r|+|x|^2+|y|^2$. 注意到，利用隐函数定理 (参见 [引理 2.1, Hu98])，$\|U\|_{1/2},\|U^*\|_{1/2}\le C_1|r|$，这里 $\|\cdot\|_{1/2}$ 是 Hölder-$\frac{1}{2}$ 范数. 接着，有

$$\begin{aligned} U^*-U=&\int_0^1\frac{\partial G_1}{\partial x}\big(r,\xi,\tau U^*+(1-\tau)U,\tau\mathcal{H}(U^*)+(1-\tau)\mathcal{H}(U)\big)\\ &\cdot(U^*-U)\mathrm{d}\tau\\ &+\int_0^1\frac{\partial G_1}{\partial y}\big(r,\xi,\tau U^*+(1-\tau)U,\tau\mathcal{H}(U^*)+(1-\tau)\mathcal{H}(U)\big)\\ &\cdot\big(\mathcal{H}(U^*)-\mathcal{H}(U)\big)\mathrm{d}\tau\\ &+r^mG_2\big(r,\xi,U^*,\mathcal{H}(U^*)\big). \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

注意到由 Privalov 定理，Hilbert 变换作用在 Hölder 空间上是有界的，因此让 $|r|\ll 1$，就能得到引理中的结论. ∎

对应于命题 3.1.1 中关于点 $A_j(u),A_j^*(u')$ 的估计，有如下关于它们在圆盘上的对应点 $\tau_j(u),\tau_j^*(u')$ 的相应结论，这将在下节证明收敛性定理中起到关键性的作用.

命题 3.1.2 沿用上面的记号和定义，有 $\tau_j^*(u') = \tau_j(u) + O(u^{N-1})$. 进一步，

$$L_{12}(u') - L_{12}(u) = O(u^{N-1}).$$

特别地，如果 $F: M \longrightarrow M'$ 是一个满足

$$F = (\widetilde{f}, \widetilde{g}) = (z, w) + \big(O(|w| + |z|^2), O(w^2)\big)$$

的形式等价映射，那么

$$L_{12}^*(u') = L_{12}(u) \text{ 在形式意义下成立.} \tag{3.1.12}$$

证 首先由 $u' = u + O(u^N)$ 和 $u = r^2$, $u' = r'^2$ 知 $r' = r + O(u^{N-1})$. 结合命题 3.1.1，可得

$$\frac{A_j^*(u')}{r'} - \frac{A_j(u)}{r} = O(u^{N-1}).$$

从而由 $\tau_j(u)$ 和 $\tau_j^*(u')$ 的定义，知

$$\sigma^*\big(\tau_j^*(u'), r'\big) - \sigma\big(\tau_j(u), r\big) = O(u^{N-1}).$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
&\sigma^*\big(\tau_j^*(u'), r'\big) - \sigma\big(\tau_j(u), r\big) \\
&\quad = \Big(\sigma^*\big(\tau_j^*(u'), r'\big) - \sigma\big(\tau_j^*(u'), r\big)\Big) \\
&\qquad + \Big(\sigma\big(\tau_j^*(u'), r\big) - \sigma\big(\tau_j(u), r\big)\Big),
\end{aligned}$$

注意到 $\sigma(\xi, r) = \xi\big(1 + O(r)\big)$，所以

$$\sigma\big(\tau_j^*(u'), r\big) - \sigma\big(\tau_j(u), r\big) = \big(\tau_j^*(u') - \tau_j(u)\big) \cdot \big(1 + O(r)\big).$$

再结合 (3.1.9)，得到

$$\big(\tau_j^*(u') - \tau_j(u)\big) \cdot \big(1 + O(r)\big) + O(u^N) = O(u^{N-1}).$$

即有

$$\tau_j^*(u') - \tau_j(u) = O(u^{N-1}).$$

由定义，

$$\begin{aligned}
&L_{12}^*(u') - L_{12}(u) \\
&\quad = \mathrm{e}^{d^*(\tau_0^*(u'), \tau_1^*(u'))} - \mathrm{e}^{d(\tau_0(u'), \tau_1(u'))} \\
&\quad = \Big(\big|\tau_0^*(u') - \tau_1^*(u')\big| - \big|\tau_0(u') - \tau_1(u')\big|\Big) \cdot \big(1 + O(r)\big) \\
&\quad \le \Big(\big|(\tau_0^*(u') - \tau_0(u')) + (\tau_1(u') - \tau_1^*(u'))\big|\Big) \cdot \big(1 + O(r)\big) \\
&\quad = O(u^{N-1}).
\end{aligned}$$

此即表明

$$L_{12}^*(u') = L_{12}(u) \text{ 在形式意义下成立.}$$

这样命题 3.1.2 得证. ■

3.2　具有消失 Bishop 不变量的 Bishop 曲面的等价分类问题

在这一节，我们利用前一节得到的曲面双曲几何的一些性质，来证明两个 Bishop 不变量为 0 的 Bishop 曲面等价当且仅当它们形式等价.

首先，证明 g 的收敛性.

引理 3.2.1　假设 $F: M \longrightarrow M'$ 是一个形式等价映射满足

$$F = (\widetilde{f}, \widetilde{g}) = (z, w) + \big(O(|w| + |z|^2), O(w^2)\big).$$

跟前面一样，记 $F = (\widetilde{f}, \widetilde{g}) = (z + f, w + g)$. 那么 $\widetilde{g}$ 是收敛的.

证　由 (3.1.12)，有

$$L_{12}^*(\widetilde{g}(u)) = L_{12}(u) \text{ 在形式意义下成立.}$$

记 $u = V^{2s}$ 且 $\widetilde{g}(u) = U^{2s}$，那么

$$L_{12}^*(U^{2s}) = L_{12}(V^{2s}).$$

注意到 $L_{12}^*(U^{2s})$ 和 $L_{12}(V^{2s})$ 分别为 U 和 V 的解析函数，进一步，记

$$L_{12}^*(U^{2s}) = (\psi^*(U))^{s-2}, \quad L_{12}(V^{2s}) = (\psi(V))^{s-2},$$

其中 ψ, ψ^* 是 $(\mathbb{C}, 0)$ 到自身的可逆全纯函数，且满足 $\psi'(0) = \psi^{*\prime}(0)$ $(= |C_{s-2,0} - C_{s-2,1}|)$. 因此，有

$$\widetilde{g}(u) = \big((\psi^{*-1} \circ \psi)(u^{\frac{1}{2s}})\big)^{2s}.$$

即 $\big(\psi^{*-1} \circ \psi(u^{\frac{1}{2s}})\big)^{2s}$ 同时有一个形式幂级数展开.

另一方面，$\big(\psi^{*-1} \circ \psi(z)^{\frac{1}{2s}}\big)^{2s}$ 定义了原点的一个多值全纯函数. 利用 Puiseux 展开 (参见 [Si88])，我们得到

$$\big(\psi^{*-1} \circ \psi(u^{\frac{1}{2s}})\big)^{2s} = \sum_{j=2s}^{\infty} c_j u^{\frac{j}{2s}},$$

这样得到 $c_j = 0$，如果 $2s$ 不能整除 j. 这样就证明了 $\widetilde{g}(u)$ 的收敛性. ∎

接着，证明下面的主要定理：

定理 3.2.1 假设 M, M' 是 0 点附近由形如 (3.1.1) 的方程定义的两个实解析的 Bishop 曲面. 假设 $F = (\widetilde{f}, \widetilde{g}) : (M, 0) \longrightarrow (M', 0)$ 是一个形式幂级数变换，那么 F 是 0 点附近的一个双全纯变换.

证 假设 $\widetilde{f} = z + f$ 满足 $wt_{\text{nor}}(f) \geq 2$，且 $\widetilde{g} = w + g$ 满足 $wt_{\text{nor}}(g) \geq 4$. 由引理 3.2.1 且用 $F_0 \circ F$ 代替原来的 F，其中 $F_0(z, w) = (z, g^{-1}(w))$. 不失一般性，可以假设 $\widetilde{g} = w$. 我们将用前面定义的曲面双曲几何来证明 $\widetilde{f}$ 的收敛性.

由命题 3.1.1 (2)，首先注意到

$$\widetilde{f}(A_j(u), u) = A_j^*(u) \text{ 在形式意义下成立.}$$

即 $\widetilde{f_{(N)}}\big(A_j(u), u\big) = A_j^*(u) + o(u^{N'})$ 对任意的 N 成立，其中 $\widetilde{f_{(N)}}$ 是 f 在 0 点的 Taylor 展开的 N 次截断；N' 只依赖于 N 且 $N' \to \infty$ 当 $N \to \infty$ 时.

记 $\widetilde{M}$ 和 $\widetilde{M'}$ 分别是 M 和 M' 的全纯凸包. 下面构造一个从 $\widetilde{M} \setminus M$ 到 $\widetilde{M'} \setminus M'$ 的全纯映射：

对于任意 $(z, u) \in D(u) \times \{u\}$，记 $\tau(u) \in \varDelta$ 使得

$$r\sigma\big(\tau(u), r\big) = z, \quad u = r^2.$$

记 $\varPsi(\cdot, r)$ 是一个从 $\varDelta$ 到自身的双全纯变换使得对 $j = 0, 1$，有

$$\varPsi\big(\tau_j(u), r\big) = \tau_j^*(u).$$

这里，要得到 $\varPsi(\cdot, r)$ 的存在性，只需要证明

$$d_{\text{hyp}}\big(\tau_0(u), \tau_1(u)\big) = d_{\text{hyp}}\big(\tau_0^*(u), \tau_1^*(u)\big).$$

但是这可以由 (3.1.12) 和引理 3.1.3得到.

现在，令

$$\varPsi_1 = \frac{\tau - \tau_0(u)}{1 - \overline{\tau_0}(u)\tau}, \quad \varPsi_1^* = \frac{\tau - \tau_0^*(u)}{1 - \overline{\tau_0^*}(u)\tau}, \quad \varTheta(\tau, r) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(r) + \mathrm{i}\theta^*(r)}\tau,$$

其中

$$\theta(r) = \arg\left\{\frac{\tau_1(u) - \tau_0(u)}{1 - \overline{\tau_0}(u)\tau_1(u)} \frac{1}{u^{\frac{s-2}{2s}}}\right\},$$

$$\theta^*(r) = \arg\left\{\frac{\tau_1^*(u) - \tau_0^*(u)}{1 - \overline{\tau_0^*}(u)\tau_1^*(u)}\frac{1}{u^{\frac{s-2}{2s}}}\right\}.$$

那么

$$\Psi(\tau, r) = \Psi_1^{*-1}(\tau, r) \circ \Theta(\tau, r) \circ \Psi_1(\tau, r). \tag{3.2.1}$$

此时 $\Psi(\tau, r)$ 在 $(\tau, u^{\frac{1}{2s}}) \in \Delta_{1+\varepsilon_0} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ 中实解析 (参见 [引理 2.1, Hu98]).

首先注意到，如果已经知道 f 是收敛的，那么由 Möbius 变换的唯一性，有

$$\widetilde{f}(r\sigma(\xi, r), r^2) = r\sigma^*(\Psi(\xi, r), r^2). \tag{3.2.2}$$

定义 Θ_j $(j = 2, \cdots, s-1)$ 为 τ_j 到 τ_0 的测地线与 τ_j 到 τ_1 的测地线间的夹角. 作为 u (或 r) 的函数，如同在 $\Psi(\xi, r)$ 中定义的那样，有

$$\begin{aligned}\Theta_j(u) &= \arg\left\{\frac{\tau_1(u) - \tau_j(u)}{\tau_0(u) - \tau_j(u)} \cdot \frac{1 - \overline{\tau_j(u)}\tau_0(u)}{1 - \overline{\tau_j(u)}\tau_1(u)}\right\} \\ &= \arg\left\{\frac{C_{s-2,2} - C_{s-2,j}}{C_{s-2,1} - C_{s-2,j}}\right\} + O(u^{1/(2s)}).\end{aligned}$$

同理，对于 M'，可类似定义 Θ_j^*. 利用证明 $L_{12}(u) = L_{12}^*(u)$ 的方法，可以得到

$$L_{1(j+1)}(u) = L_{1(j+1)}^*(u).$$

作为上述讨论的一个直接推论，我们有

推论 3.2.1　$\Psi(\tau_j(u), r) = \tau_j^*(u)$ 对所有的 $j = 0, 1, \cdots, s-1$ 成立.

证　首先，可以用一个 Möbius 变换把 τ_j 映到原点且 τ_0 映到正实轴上. 然后，证明 $\Theta_j = \Theta_j^*$，从而可得 $\tau_j^*(u)$ 被 $\tau_j(u)$ 唯一决定，即有推论得证. 为此，令

$$d_{\text{hyp}}(\tau_0, \tau_j) = r_1 = d_{\text{hyp}}(\tau_0^*, \tau_j^*),$$

$$d_{\text{hyp}}(\tau_1, \tau_j) = r_2 = d_{\text{hyp}}(\tau_1^*, \tau_j^*),$$

$$\tau_3 = re^{\vartheta}, \quad \tau_3^* = re^{\vartheta'}.$$

因为 $d_{\rm hyp}(\tau_0,\tau_1)=d_{\rm hyp}(\tau_1^*,\tau_1^*)$，所以由双曲距离的定义可得

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\left|\dfrac{r_1-r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}}{1-r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}}\right|}{1-\left|\dfrac{r_1-r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}}{1-r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}}\right|}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\left|\dfrac{r_1-r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta'}}{1-r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta'}}\right|}{1-\left|\dfrac{r_1-r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta'}}{1-r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta'}}\right|}\right),$$

即

$$\left|\frac{r_1-r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}}{1-r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}}\right|=\left|\frac{r_1-r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta'}}{1-r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta'}}\right|.$$

展开整理可得

$$r_1r_2(1-r_1^2)(1-r_2^2)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vartheta'-\vartheta)})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta'}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta})=0,$$

即

$$\vartheta=-\vartheta' \text{ 或 } \vartheta'=\vartheta.$$

然而 $\vartheta=-\vartheta'$ 意味着推论 3.2.1 中的映射 Ψ 为一个反全纯变换，这与我们的构造相矛盾. 故有 $\vartheta=\vartheta'$. 从而推论 3.2.1 得证. ■

现在，对于原点附近的 $(z,u)\in\widetilde{M}\setminus M$，定义

$$f^*(z,u)=\sqrt{u}\sigma^*\left(\Psi\left(\sigma^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{u}},\sqrt{u}\right),\sqrt{u}\right),\sqrt{u}\right).$$

那么 $f^*(z,u)$ 在 $\widetilde{M}\setminus M$ 中收敛. 现在，证明如下引理：

引理 3.2.2 $\forall\alpha\geq 0$,

$$\frac{\partial^\alpha f^*}{\partial z^\alpha}(0,u)=\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^\alpha}(0,u)$$

在形式幂级数意义下成立. 即若假设 $\widetilde{f_{(N)}}$ 是 $\widetilde{f}$ 在 0 点的 Taylor 展开中所有次数小于或等于 N 的多项式，那么当 $N\to\infty$ 时，$\exists N'(N)\to\infty$ 使得

$$\frac{\partial^\alpha f^*}{\partial z^\alpha}(0,u)=\frac{\partial^\alpha\widetilde{f_{(N)}}}{\partial z^\alpha}(0,u)+o(u^{N'}).$$

证 假设 $S(u)$ 是 $D(u)$ 中顶点为 $A_j(u)\,(j=0,1,\cdots,s-1)$ 的双曲多边形，它的边由这些顶点双曲连接得到. 假设 $S^*(u)$ 为 M'

中对应的双曲多边形. 注意到对任意的点 $P, Q \in \Delta$，双曲连接 P 和 Q 的部分由下述等式给出 (参见 [Kr04]):

$$\gamma_{P,Q}(t) = \frac{t\dfrac{Q-P}{1-Q\bar{P}}+P}{1+t\bar{P}\cdot\dfrac{Q-P}{1-Q\bar{P}}}, \quad 0 \le t \le 1. \tag{3.2.3}$$

因此，注意到 $\widetilde{f}$ 把 $D(u)$ 中顶点形式地映射到 $S^*(u)$ 中对应的顶点，利用与定理 3.1.2 证明中同样的讨论，对任意的点 $P \in \partial S(u)$，都有

$$f^*(P) = \widetilde{f_{(N)}}(P) + \mathrm{Error}(P),$$

这里

$$\left|\mathrm{Error}(P)\right| \le Cu^{N'}, \text{ 且当 } N'(N) \to \infty \text{ 时有 } N \to \infty,$$

其中 C 是一个不依赖于 P 的常数.

现在，由 Cauchy 公式，

$$\frac{\partial^\alpha f^*}{\partial z^\alpha}(0,u) = \frac{\alpha!}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial S(u)}\frac{f^*(\zeta,u)}{\zeta^{\alpha+1}}\mathrm{d}\zeta$$

且

$$\frac{\partial^\alpha \widetilde{f_{(N)}}}{\partial z^\alpha}(0,u) = \frac{\alpha!}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial S(u)}\frac{\widetilde{f_{(N)}}(\zeta,u)}{\zeta^{\alpha+1}}\mathrm{d}\zeta,$$

注意到由 (3.1.6) 和 (3.2.3) 可得，对于 $z \in \partial S(u)$，有 $|z| \gtrsim u^{\frac{s-1}{s}}$，因此

$$\left|\frac{\partial^\alpha f^*}{\partial z^\alpha}(0,u) - \frac{\partial^\alpha \widetilde{f_{(N)}}}{\partial z^\alpha}(0,u)\right| \lesssim O(u^{N'-\frac{s-1}{s}\alpha}). \tag{3.2.4}$$

这样就完成了引理 3.2.2 的证明. ∎

接着证明定理 3.2.1，注意到现在已经有如下事实:

(i) $\sigma^*(\zeta,\sqrt{u})$ 关于 $(\zeta,\sqrt{u})$ 在 $(0,0)$ 点附近解析;

(ii) $\Psi(\tau,\sqrt{u})$ 关于 τ 和 $u^{\frac{1}{2s}}$ 在 $(0,0)$ 点附近解析;

(iii) $\sigma^{-1}(\frac{z}{\sqrt{u}},\sqrt{u})$ 关于 $(\frac{z}{\sqrt{u}},\sqrt{u})$ 在 $(0,0)$ 点附近也解析.

记

$$\Psi(\tau,\sqrt{u}) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty} a_{\alpha\beta}\tau^\alpha u^{\frac{\beta}{2s}},$$

且

$$\Psi(\tau;Y_1)=\sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty}a_{\alpha\beta}\tau^\alpha Y_1^\beta,$$

那么

$$H(X,Y_1,Y_2)=Y_2\sigma^*\left(\Psi\big(\sigma^{-1}(X,Y_2);Y_1\big),Y_2\right)$$

关于 X,Y_1,Y_2 在 0 点附近解析. 定义

$$H(X,Y_1,Y_2)=\sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{\infty}b_{\alpha\beta\gamma}X^\alpha Y_1^\beta Y_2^\gamma, \tag{3.2.5}$$

那么

$$f^*(z,u)=H\left(\frac{z}{\sqrt{u}},u^{\frac{1}{2s}},\sqrt{u}\right)=\sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{\infty}b_{\alpha\beta\gamma}z^\alpha u^{\frac{\gamma-\alpha}{2}+\frac{\beta}{2s}},$$

因此

$$\frac{\partial^\alpha\widetilde{f}}{\partial z^\alpha}(0,u)=\sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{\infty}b_{\alpha\beta\gamma}\alpha!u^{\frac{\gamma-\alpha}{2}+\frac{\beta}{2s}}$$

在形式幂级数意义下成立. 于是，如果 $b_{\alpha\beta\gamma}\neq 0$, $\frac{\gamma-\alpha}{2}+\frac{\beta}{2s}=\beta'$ 是一个非负整数，则

$$f^*(z,u)=\sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{\infty}b_{\alpha\beta\gamma}z^\alpha u^{\beta'}.$$

现在，由 (3.2.5) 知

$$\text{当}R\gg 1\text{时},\ |b_{\alpha\beta\gamma}|\lesssim R^{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}.$$

因此

$$|b_{\alpha\beta\gamma}|\lesssim R^{2s|\alpha|+2s\beta'}\lesssim (R^{2s})^{\alpha+\beta'}.$$

这说明 $f^*(z,u)$ 关于 (z,u) 在 0 点附近全纯，所以 $\widetilde{f}$ 收敛. 这样就证明了定理 3.2.1. ∎

定理 1.2.3、推论 1.2.2 和定理 1.2.4 的证明 定理 1.2.3 和定理 3.2.1 有相同的内容. 由推论 1.2.1 (a)，可以看出对于推论 1.2.2 (a) 中的 M，它一定形式等价于 M_s. 结合定理 1.2.3，就可以得到 M 事实上双全纯等价于 M_s. 推论 1.2.2 (b) 是推论 1.2.1 (a) 和推论 1.2.2 (a) 的一个简单推论. 定理 1.2.4 的证明可以从定理 1.2.1 和定理 1.2.3 得到. ∎

作为定理 1.2.3 的另外一个应用，有如下推论：

推论 3.2.2 假设 $(M,0)$ 是一个定义在 0 点附近的 Bishop 不变量为 0 且 Moser 不变量 $s<\infty$ 的实解析 Bishop 曲面，那么 $\mathrm{aut}_0(M)$ 中的任何元素都是 $(M,0)$ 的全纯自同构群.

3.3　一类特殊 Bishop 曲面的一些等价性质

在第二章中，我们证明了 Bishop 不变量为 0、Moser 不变量为 s 的 Bishop 曲面有正规型 (1.2.1), (1.2.2)，即有正规型

$$w'=z'\overline{z'}+z'^s+\overline{z'}^s+2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{s-1}a_{ks+j}z'^{ks+j}\right). \tag{3.3.1}$$

前一节里证明了，如果上述正规型收敛，那么把上述 Bishop 曲面变换到正规型的映射一定收敛. 然而遗憾的是，我们还不能证明上述正规型一定收敛，或等价地，还不能刻画出在双全纯等价的意义下，Bishop 不变量为 0、Moser 不变量为 s 的 Bishop 曲面的模空间. 即使对于由方程 $w=z\bar{z}+2\mathrm{Re}(z^s+az^{s+1})$ 定义的看起来最简单的 Bishop 曲面，我们也很难找到关于其形式正规型的更多性质. 事实上，如果对这一曲面进行有限项的正规化，理论上来说，可以将其余项通过定理 2.2.1 中固定的程序求出来，然而这个计算量太大，具体将其求解出来是非常困难的. 所以现在对我们来说，产生的余项看起来似乎是杂乱无章的，因此判断这类特殊 Bishop 曲面正规型的收敛性依然不是一件容易的事情.

接下来，我们将通过直接的计算得到曲面

$$w=z\bar{z}+2\mathrm{Re}(z^s+az^{s+1})$$

的正规型中的一些低次项，从而对这一正规型有一个非常初步的了解，并由此得到曲面 $w=z\bar{z}+2\mathrm{Re}(z^s+az^{s+1})$ 在不同的系数下，关于不同 Bishop 曲面间的一些全纯等价性质.

现在假定曲面由如下方程定义：

$$w=z\bar{z}+2\mathrm{Re}(z^s+az^{s+1}). \tag{3.3.2}$$

(1) 首先考虑 $s\geq 4$ 的情形. 假设由 (3.3.2) 定义的曲面有下述形式的正规型：

$$w'=z'\bar{z}'+2\mathrm{Re}(z'^s+b_1z'^{s+2}+b_2z'^{s+3})+o_{wt}(s+3), \tag{3.3.3}$$

这里定义 $z, \bar{z}$ 的 weight 分别为 1 和 $s-1$，并且其变换

$$\left.\begin{aligned} z' &= z + a_1 w - \overline{a}_1 z^2 + a_2 z^3 + a_3 z w + a_4 z^4 \\ &\quad + a_5 z^2 w + a_6 w^2 + \cdots, \\ w' &= w + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{3.3.4}$$

因为在正规型中，只考虑 weight$\leq s+3$ 的项，而 $z, \bar{z}$ 的 weight 分别为 $1, s-1$，故只需考虑 z' 中 weight$\leq (s+3)-(s-1)=4$ 的项和 $\bar{z}'$ 中 weight$\leq (s+3)-1=s+2$ 的项. 因此把 $z', \bar{z}'$ 写成如下形式：

$$\begin{cases} z' = z + a_1(z\bar{z} + z^s) - \overline{a}_1 z^2 + a_2 z^3 + a_4 z^4 + o_{wt}(4), \\ \overline{z'} = \bar{z} + \overline{a}_1(z\bar{z} + z^s + a z^{s+1}) - a_1 \overline{z^2} + o_{wt}(s+2). \end{cases} \tag{3.3.5}$$

(i) 当 $s>4$ 时，进一步有

$$\begin{cases} z' = z - \overline{a}_1 z^2 + a_2 z^3 + a_4 z^4 + o_{wt}(4), \\ \overline{z'} = \bar{z} + \overline{a}_1(z\bar{z} + z^s + a z^{s+1}) + o_{wt}(s+2). \end{cases} \tag{3.3.6}$$

把 (3.3.6) 代入 (3.3.3) 得到

$$\begin{aligned} & z\bar{z} + 2\mathrm{Re}(z^s + a z^{s+1}) \\ &\quad = (z - \overline{a}_1 z^2 + a_2 z^3 + a_4 z^4)\big[\bar{z} + \overline{a}_1(z\bar{z} + z^s + a z^{s+1})\big] \\ &\qquad (z - \overline{a}_1 z^2 + a_2 z^3 + a_4 z^4)^s + \big[\bar{z} + \overline{a}_1(z\bar{z} + z^s + a z^{s+1})\big]^s \\ &\qquad + b_1(z - \overline{a}_1 z^2 + a_2 z^3 + a_4 z^4)^{s+2} + b_2 z^{s+3} + o_{wt}(s+3), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \big[-a z^{s+1} + (1-s)\overline{a}_1 z^{s+1}\big] + \big[a\overline{a}_1 z^{s+2} - \overline{a}_1^2 z^2(z\bar{z} + z^s) \\ &\qquad + a_2 z^3 \bar{z} + s a_2 z^{s+2} + C_s^2 z^{s-2} \overline{a}_1^2 z^4 + b_1 z^{s+2}\big] \\ &\qquad + \big[-a\overline{a}_1^2 z^{s+3} + a_2 z^3 \overline{a}_1(z\bar{z} + z^s) + a_4 z^4 \bar{z} \\ &\qquad + s a_4 z^{s-1} z^4 + 2C_s^2 z^{s-2}(-\overline{a}_1) a_2 z^5 \\ &\qquad + C_s^3 z^{s-3}(-\overline{a}_1 z^2)^3 + b_1 z^{s+1}(-\overline{a}_1) z^2 + b_2 z^{s+3}\big] \\ &\quad = o_{wt}(s+3). \end{aligned}$$

这里记

$$C_n^k := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

进一步化简得

$$
\begin{aligned}
&\big[(1-s)\overline{a}_1-a\big]z^{s+1}+(a\overline{a}_1-\overline{a}_1^2+sa_2+C_s^2\overline{a}_1^2+b_1)z^{s+2}\\
&\qquad+(a_2-\overline{a}_1^2)z^3\overline{z}+\big[-a\overline{a}_1^2+a_2\overline{a}_1+sa_4-2C_s^2\overline{a}_1a_2\\
&\qquad-C_s^3\overline{a}_1^3-(s+2)\overline{a}_1b_1+b_2\big]z^{s+3}+(a_2\overline{a}_1+a_4)z^4\overline{z}\\
&\quad=0.
\end{aligned}
$$

因此得到

$$
a=(1-s)\overline{a}_1,\quad a_2=\overline{a}_1^2,\quad a_4=-a_2\overline{a}_1=-\overline{a}_1^2\overline{a}_1=-\overline{a}_1^3,
$$

且

$$
\begin{aligned}
b_1&=-a\overline{a}_1+\overline{a}_1^2-sa_2-C_s^2\overline{a}_1^2\\
&=-a\frac{a}{1-s}+\left(\frac{a}{1-s}\right)^2-s\left(\frac{a}{1-s}\right)^2\\
&\quad-\frac{s(s-1)}{2}\left(\frac{a}{1-s}\right)^2\\
&=\frac{a^2}{2(1-s)^2}\big[-2(1-s)+2-2s-s^2+s\big]\\
&=\frac{s-s^2}{2(1-s)^2}a^2=\frac{s}{2(1-s)}a^2,\\
b_2&=a\overline{a}_1^2-a_2\overline{a}_1-sa_4+2C_s^2\overline{a}_1a_2+C_s^3\overline{a}_1^3+(s+2)\overline{a}_1b_1\\
&=a\left(\frac{a}{1-s}\right)^2-\left(\frac{a}{1-s}\right)^3+s\left(\frac{a}{1-s}\right)^3\\
&\quad+s(s-1)\left(\frac{a}{1-s}\right)^3+\frac{s(s-1)(s-2)}{6}\left(\frac{a}{1-s}\right)^3\\
&\quad+(s+2)\frac{a}{1-s}\cdot\frac{s}{2(1-s)}a^2\\
&=\frac{a^3}{6(1-s)^3}\big[6(1-s)-6+6s+6s(s-1)\\
&\quad+s(s-1)(s-2)+3s(s+2)(1-s)\big]\\
&=\frac{a^3}{6(1-s)^3}(2s-2s^3)\\
&=\frac{s(1+s)}{3(1-s)^2}a^3.
\end{aligned}
$$

即当 $s>4$ 时，若有 $w=z\bar{z}+2\mathrm{Re}(z^s+az^{s+1})$ 与 $w=z\bar{z}+2\mathrm{Re}(z^s+\widetilde{a}z^{s+1})$ 全纯等价，则由定理 1.2.4 知

$$\frac{s}{2(1-s)}a^2=\frac{s}{2(1-s)}\widetilde{a}^2\cdot\mathrm{e}^{2i\theta},$$

$$\frac{s(1+s)}{3(1-s)^2}a^3=\frac{s(1+s)}{3(1-s)^2}a^3\cdot\mathrm{e}^{3i\theta},$$

这里 θ 为一个满足 $\mathrm{e}^{is\theta}=0$ 的常数，即有 $a=\mathrm{e}^{i\theta}\widetilde{a}$.

(ii) 当 $s=4$ 时，

$$\begin{cases} z'=z+a_1(z\bar{z}+z^4)-\overline{a}_1z^2+a_2z^3+a_4z^4+o_{wt}(4), \\ \overline{z'}=\bar{z}+\overline{a}_1(z\bar{z}+z^4+az^5)-a_1\overline{z^2}+o_{wt}(6). \end{cases} \tag{3.3.7}$$

把上述等式代入

$$w'=z'\bar{z}'+2\mathrm{Re}(z'^4+b_1z'^6+b_2z'^7)+o_{wt}(7),$$

可以得到

$$\begin{aligned} &z\bar{z}+2\mathrm{Re}(z^4+az^5)\\ &\quad=\left[z+a_1(z\bar{z}+z^4)-\overline{a}_1z^2+a_2z^3+a_4z^4\right]\\ &\qquad\cdot\left[\bar{z}+\overline{a}_1(z\bar{z}+z^4+az^5)-a_1\overline{z^2}\right]\\ &\qquad+\left[z+a_1(z\bar{z}+z^4)-\overline{a}_1z^2+a_2z^3+a_4z^4\right]^4\\ &\qquad+b_1\left[z+a_1(z\bar{z}+z^4)-\overline{a}_1z^2+a_2z^3+a_4z^4\right]^6\\ &\qquad+b_2z^7+o_{wt}(7), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} &\left[-az^5+z\overline{a}_1(z\bar{z}+z^4)-\overline{a}_1z^2\bar{z}-4\overline{a}_1z^5\right]\\ &\qquad+\left[z\overline{a}_1az^5-\overline{a}_1z^2\overline{a}_1(z\bar{z}+z^4)+a_2z^3\bar{z}+4z^3a_2z^3\right.\\ &\qquad\left.+C_4^2z^2(-\overline{a}_1z^2)^2+b_1z^6\right]+\left[-a_1z\bar{z}^2-\overline{a}_1z^2\overline{a}_1az^5\right.\\ &\qquad+a_2z^3\overline{a}_1(z\bar{z}+z^4)+\bar{z}\big(a_1z\bar{z}+(a_1+a_4)z^4\big)\\ &\qquad+4z^3\big(a_1z\bar{z}+(a_1+a_4)\big)z^4+2C_4^2z^2(-\overline{a}_1)a_2z^5\\ &\qquad\left.+4z(-\overline{a}_1z^2)^3+6b_1z^5(-\overline{a}_1)z^2+b_2z^7\right]\\ &\quad=0. \end{aligned}$$

即有

$$
\begin{aligned}
&(-a-3\overline{a}_1)z^5+(\overline{a}_1a-\overline{a}_1^2+4a_2+6\overline{a}_1^2+b_1)z^6+(a_2-\overline{a}_1^2)z^3\overline{z}\\
&+\big[-\overline{a}_1^2a+a_2\overline{a}_1+4(a_1+a_4)-12\overline{a}_1a_2-4\overline{a}_1^3-6b_1\overline{a}_1+b_2\big]z^7\\
&+(\overline{a}_1a_2+a_1+a_4+4a_1)\overline{z}z^4=0.
\end{aligned}
$$

这样得到

$$
\begin{aligned}
&a=-3\overline{a}_1,\quad a_2=\overline{a}_1^2=\frac{a^2}{9},\\
&a_4=-\overline{a}_1a_2-5a_1=\frac{a}{3}\cdot\frac{a^2}{9}-5\cdot\left(-\frac{\overline{a}}{3}\right)=\frac{a^3}{27}+\frac{5}{3}\overline{a},
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
b_1&=-\overline{a}_1a+\overline{a}_1^2-4a_2-6\overline{a}_1^2=\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{9}-4\cdot\frac{a^2}{9}-6\cdot\frac{a^2}{9}\\
&=-\frac{2}{3}a^2,\\
b_2&=\overline{a}_1^2a-a_2\overline{a}_1-4(a_1+a_4)+12\overline{a}_1a_2+4\overline{a}_1^3+6b_1\overline{a}_1\\
&=\frac{a^3}{9}-\frac{a^2}{9}\left(-\frac{a}{3}\right)-4\left(-\frac{\overline{a}}{3}+\frac{a^3}{27}+\frac{5}{3}\overline{a}\right)\\
&\quad+12\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)\cdot\frac{a^2}{9}+4\cdot\left(-\frac{a^3}{27}\right)+6\cdot\left(-\frac{2}{3}a^2\right)\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)\\
&=\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{4}{27}-\frac{12}{27}-\frac{4}{27}+\frac{12}{9}\right)a^3-\frac{16}{3}\overline{a}\\
&=\frac{20}{27}a^3-\frac{16}{3}\overline{a}.
\end{aligned}
$$

若有 $w=z\overline{z}+2\mathrm{Re}(z^4+az^5)$ 与 $w=z\overline{z}+2\mathrm{Re}(z^4+\widetilde{a}z^5)$ 全纯等价，则由定理 (1.2.4) 知

$$
\begin{aligned}
-\frac{2}{3}a^2&=-\frac{2}{3}\widetilde{a}^2\cdot\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta},\\
\frac{20}{27}a^3-\frac{16}{3}\overline{a}&=\left(\frac{20}{27}\widetilde{a}^3-\frac{16}{3}\overline{\widetilde{a}}\right)\cdot\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta},
\end{aligned}
$$

这里 θ 为一个满足 $\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta}=1$ 的常数. 由前一个方程可得 $a=\widetilde{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 或 $a=-\widetilde{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，这两式均满足 $a=\widetilde{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$，其中 ϑ 为某个使 $\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\vartheta}=1$ 的常数.

(2) 最后计算当 $s=3$ 时的情况，即考虑 $w=z\overline{z}+2\mathrm{Re}(z^3+az^4)$ 的正规型中低次项的系数. 此时假设 $z,\overline{z}$ 的 weight 分别为 1 和 2,

并假设上述曲面被变换到如下近似正规型：

$$w' = z'\overline{z'} + z'^3 + \overline{z'}^3 + bz'^5 + \bar{b}\overline{z'}^5 + cz'^8 + \bar{c}\overline{z'}^8 + o_{wt}(8), \quad (3.3.8)$$

其变换为

$$\begin{cases} z' = z - \dfrac{1}{2}\bar{a}w + \dfrac{1}{2}az^2 + a_1z^3 + a_2zw + a_3z^4 + a_4z^2w \\ \qquad + a_5w^2 + a_6z^5 + a_7z^3w + a_8zw^2 + a_9z^6 + a_{10}z^4w \\ \qquad + a_{11}z^2w^2 + a_{12}w^3 + a_{13}z^7 + \cdots, \\ w' = w + b_2w^2 + \cdots. \end{cases}$$

把上述方程代入 (3.3.8)，重复定理 2.2.1 证明中的程序，分别比较 $z^4, \bar{z}z, \bar{z}^2z^2, \bar{z}^3z,\ z^5, \bar{z}z^4, \bar{z}^2z^3, z^6, \bar{z}z^5, z^7, z^8$ 的系数，经过一个非常麻烦但程序化的计算，可以得到如下解：

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2\bar{a} + \frac{1}{4}a^2, \\
a_2 &= -\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a\bar{a} - \frac{1}{6}\bar{a}^3, \\
a_3 &= \frac{5}{8}a^3 + 3a\bar{a}, \\
a_4 &= \frac{13}{192}a^4 - \frac{41}{16}a^2\bar{a} - \frac{159}{16}\bar{a}^2 - \frac{15}{8}a - \frac{1}{12}\bar{a}^3a^2, \\
a_5 &= -\frac{29}{192}\bar{a}^4 + \frac{1}{6}a^3\bar{a}^2 + \frac{39}{16}\bar{a}^2a + \frac{135}{16}a^2 + \frac{27}{8}\bar{a}, \\
a_6 &= \frac{19}{32}a^4 + \frac{51}{8}a^2\bar{a} + \frac{129}{8}\bar{a}^2 + \frac{3}{4}a, \\
a_7 &= -15\bar{a} + \frac{29}{48}\bar{a}^4 - \frac{279}{8}a^2 - \frac{315}{16}\bar{a}^2a - \frac{209}{48}a^3\bar{a} \\
&\quad - \frac{1}{24}\bar{a}^3a^2 + \frac{29}{192}a^5, \\
a_9 &= \frac{291}{8}\bar{a} - \frac{231}{64}\bar{a}^4 + \frac{1209}{16}a^2 + 69\bar{a}^2a + \frac{223}{16}a^3\bar{a} \\
&\quad - \frac{1}{4}\bar{a}^3a^2 - \frac{49}{64}a^5,
\end{aligned}$$

且

$$b = -\frac{9}{2}\bar{a} - \frac{3}{4}a^2, \quad b_2 = -\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}\bar{a}^3 + \frac{3}{2}a\bar{a},$$

$$c = -\frac{297}{4}\bar{a} + \frac{231}{32}\bar{a}^4 - \frac{1179}{8}a^2 - \frac{459}{8}\bar{a}^2a + \frac{1}{2}\bar{a}^3a^2 + 4a^5.$$

为了简单起见，记

$$c(a) = a_1\overline{a} + a_2\overline{a^4} + a_3a^2 + a_4\overline{a}^2 a + \frac{1}{2}\overline{a}^3 a^2 + 4a^5,$$

即令

$$a_1 = -\frac{297}{4},\ a_2 = \frac{231}{32},\ a_3 = -\frac{1179}{8},\ a_4 = -\frac{459}{8}.$$

如果 $w = z\bar{z} + 2\mathrm{Re}(z^3 + az^4)$ 和 $w = z\bar{z} + 2\mathrm{Re}(z^3 + \widetilde{a}z^4)$ 全纯等价，则必有

$$-\frac{9}{2}\bar{a} - \frac{3}{4}a^2 = \left(-\frac{9}{2}\bar{\widetilde{a}} - \frac{3}{4}\widetilde{a}^2\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \tag{3.3.9}$$

$$\begin{aligned} &a_1\overline{a} + a_2\overline{a^4} + a_3a^2 + a_4\overline{a}^2 a + \frac{1}{2}\overline{a}^3 a^2 + 4a^5 \\ &= \left(a_1\overline{\widetilde{a}} + a_2\overline{\widetilde{a}^4} + a_3\widetilde{a}^2 + a_4\overline{\widetilde{a}^2}\widetilde{a} + \frac{1}{2}\overline{\widetilde{a}^3}\widetilde{a}^2 + 4\widetilde{a}^5\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

这里 θ 为一个满足 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\theta} = 0$ 的常数. 令

$$x = a - \widetilde{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}, \quad y = a + \widetilde{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta},$$

则 (3.3.9) 变为 $\overline{x} = -\frac{1}{6}xy$. 若 $x \neq 0$，那么

$$\frac{\overline{x}}{x} = -\frac{1}{6}y,$$

这样可设 $x = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$, $y = -6\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\vartheta}$，将其代入 (3.3.10) 得到

$$\begin{aligned} &\overline{a}_1 r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta} - 3a_2 r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\left(r^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\vartheta} + 6^2\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\vartheta}\right) - 6ra_3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta} \\ &\quad + a_4\left[r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\left(\frac{r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta} - 6\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\vartheta}}{2}\right)^2 - 3r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}(-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} - 6\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\vartheta})\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[-6r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}\left(\frac{r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta} - 6\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\vartheta}}{2}\right)^3 + r^3\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\vartheta}\right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2}r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}(r^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\vartheta} + 6^2\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\vartheta})\right] \\ &\quad + 4\left[\left(\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} - 6\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\vartheta}}{2}\right)^5 - \left(\frac{-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} - 6\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\vartheta}}{2}\right)^5\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

然而，很难判断上述方程在 $r>0$, $\vartheta\in\mathbb{R}$ 时是否有解. 下面证明，如果 $a,\widetilde{a}$ 均为实数，那么上述方程无解. 事实上，此时有 $a+\widetilde{a}=-6$，且

$$a_1(a-\widetilde{a})+a_2(a^4-\widetilde{a}^4)+a_3(a^2-\widetilde{a}^2)+a_4(a^3-\widetilde{a}^3)$$
$$+(\frac{1}{2}+4)(a^5-\widetilde{a}^5)=0.$$

若 $a\neq\widetilde{a}$，那么两边同除以 $a-\widetilde{a}$ 得

$$a_1+a_2(a+\widetilde{a})(a^2+\widetilde{a}^2)+a_3(a+\widetilde{a})+a_4(a^2+a\widetilde{a}+\widetilde{a}^2)$$
$$+\frac{9}{2}(a^4+a^3\widetilde{a}+a^2\widetilde{a}^2+a\widetilde{a}^3+\widetilde{a}^4)=0. \tag{3.3.11}$$

结合 $a+\widetilde{a}=-6$，有

$$a_1-6a_2(6^2-2a\widetilde{a})-6a_3+a_4(6^2-a\widetilde{a})$$
$$+\frac{9}{2}(6^4-3\cdot 6^2a\widetilde{a}+a^2\widetilde{a}^2)=0,$$

即

$$\frac{9}{2}a^2\widetilde{a}^2+(12a_2-a_4-\frac{9}{2}\cdot 3\cdot 6^2)a\widetilde{a}$$
$$+\left(a_1-6^3a_2-6a_3+6^2a_4+\frac{9}{2}\cdot 6^4\right)=0.$$

注意到

$$12a_2-a_4-\frac{9}{2}\cdot 3\cdot 6^2=12\cdot\frac{231}{32}+\frac{459}{8}-\frac{9}{2}\cdot 3\cdot 6^2=-342,$$

$$\begin{aligned}&a_1-6^3a_2-6a_3+6^2a_4+\frac{9}{2}\cdot 6^4\\&\quad=-\frac{297}{4}-6^3\cdot\frac{231}{32}+6\cdot\frac{1179}{8}-6^2\cdot\frac{459}{8}+\frac{9}{2}\cdot 6^4\\&\quad=\frac{12069}{4},\end{aligned}$$

所以 $a\widetilde{a}$ 满足方程 $(a\widetilde{a})^2-342a\widetilde{a}+\frac{12069}{4}=0$，即

$$a\widetilde{a}=\frac{342\pm\sqrt{342^2-4\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{12069}{4}}}{9}.$$

注意到已经有 $a+\widetilde{a}=-6$，结合 $(a+\widetilde{a})^2\geq 4a\widetilde{a}$ 得到

$$4\cdot\frac{342-\sqrt{342^2-4\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{12069}{4}}}{9}\leq 36,$$

即

$$342^2-\frac{9}{2}\cdot 12069=62653.5\geq 68121=261^2.$$

矛盾.

综上所述，就得到了如下的命题：

命题 3.3.1 (a) 当 $s\geq 4$ 时，$w=z\bar{z}+2\mathrm{Re}(z^s+az^{s+1})$ 与 $w=z\bar{z}+2\mathrm{Re}(z^s+zb^{s+1})$ 全纯等价当且仅当 $a=b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，其中 θ 为满足 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\theta}=1$ 的常数.

(b) 若 a,b 均为实数，且 $a\neq b$，则 $w=z\bar{z}+2\mathrm{Re}(z^3+az^4)$ 与 $w=z\bar{z}+2\mathrm{Re}(z^3+bz^4)$ 不能全纯等价.

第四章　一类余维数为 2 且形式等价于一个二次曲面的 CR 奇异流形

在本章，我们研究 $\mathbb{C}^{n+1}(n \geq 2)$ 中的一类余维数为 2 的奇异 CR 子流形，它在 0 点附近由如下形式的方程所定义：

$$w = |z|^2 + O(|z|^3),$$

这里，$(z, w) \subset \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}$ 为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的坐标. 首先给出了 M 在 0 点附近的拟正规型，并通过这个拟正规型给出了 $(M, 0)$ 能形式平坦化的充要条件，最后利用 KAM 快速迭代法证明了 $(M, 0)$ 能双全纯等价于二次曲面 $(M_\infty : w = |z|^2, 0)$ 当且仅当它们形式等价，这就把 Moser 在 [Mos85] 中的定理推广到了高维的情形.

4.1　一些记号和背景介绍

在本章，用 $(z, w) = (z_1, \cdots, z_n, w)$ $(n \geq 2)$ 来表示 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的坐标. 我们首先回顾一些在 Stolovitch [Sto] 和 Dolbeault-Tomassini-Zaitsev [DTZ05] 中的记号和定义.

假设 $(M, 0)$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的一个余维数为 2 的形式子流形，$0 \in M$ 是它的一个 CR 奇异点且 $T_0^{(1,0)}M = \{w = 0\}$. 那么 M 能由如下的形式方程定义：

$$w = q(z, \overline{z}) + o(|z|^2), \tag{4.1.1}$$

其中 $q(z, \overline{z})$ 是 $(z, \overline{z})$ 的一个二次多项式. 我们称 $0 \in M$ 是一个**不完全退化的 CR 奇异点**，如果不存在一个坐标变换，使得 $q \equiv 0$.

沿用 Dolbeault-Tomassini-Zaitsev 中的记号和定义，进一步称 0 是一个**不完全退化的平坦 CR 奇异点**，如果可以通过线性变换，使得 q 取实值.

假设 0 是一个不完全退化的平坦 CR 奇异点且对任意的 z 都有 $q(z,z) = A(z,\overline{z}) + B(z,\overline{z}) \in \mathbb{R}$，其中

$$A(z,\overline{z}) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\overline{\beta}} z_\alpha \overline{z_\beta}, \quad B(z,\overline{z}) = 2\mathrm{Re}\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} b_{\alpha\beta} z_\alpha z_\beta\right).$$

那么 $A(z,\overline{z})$ 正定的条件与坐标变换的选取无关. 假设 A 是正定的，那么利用经典的 Takagi 定理，能够找到一个线性坐标变换 (z,w)，使得在新的坐标下，$(M,0)$ 的定义函数有 (4.1.1) 的形式，且满足

$$q(z,\overline{z}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \left[|z_\alpha|^2 + \lambda_\alpha(z_\alpha^2 + \overline{z_\alpha}^2)\right],$$

这里 $0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n < \infty$. 根据 Stolovitch 的定义，称 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ 为**推广的 Bishop 不变量**. 如果对任意的 α，有 $0 \leq \lambda_\alpha < \frac{1}{2}$，则称 0 是 M **平坦的椭圆 CR 奇异点**. 注意到 $0 \in M$ 是一个平坦的椭圆 CR 奇异点当且仅当在 M 的一个特定的形如 (4.1.1) 的定义函数中，可以使得对 $z \neq 0$ 有 $q(z,\overline{z}) > 0$ (这个定义与 [DTZ05] 中平坦的椭圆 CR 奇异点相同). 如果对所有的 α 都有 $\lambda_\alpha > \frac{1}{2}$，则称 $0 \in M$ 是一个**双曲的平坦 CR 奇异点**. 关于椭圆和双曲性的更一般讨论，有兴趣的读者可参见 Stolovitch [Sto].

沿用上面的术语，定理 1.2.3 中的流形在 CR 奇异点的所有推广的 Bishiop 不变量为 0 . 在 [Gon94a], [Sto] 中，他们研究了所有推广的 Bishop 不变量为 0 的曲面的收敛性问题. 前面已经提到，研究 Bishop 不变量为 0 的方法与研究 Bishop 不变量不为 0 的方法有相当大的差异 (参见 [MW83], [Mos85], [Gon94b], [Sto]). 现在我们转到所有推广的 Bishop 不变量为 0 的情况.

4.2 一类余维数为 2 的 CR 奇异流形的拟正规型

假设 $E(z,\bar{z})$ 和 $f(z,w)$ 分别为 $(z,\bar{z})$ 和 (z,w) 的不含常数项

的形式幂级数. 我们称 $\mathrm{Ord}\big(E(z,\bar{z})\big) \geq k$，如果

$$E(tz, t\bar{z}) = O(t^k);$$

同理，称 $\mathrm{Ord}_{wt}\big(f(z,w)\big) \geq k$，如果 $f(tz,t^2w) = O(t^k)$. 定义 $z, \bar{z}$ 的权为 1，w 的权为 2. 对于一个单项式 $h(z,w)$，它的权根据上面的权系统定义，记为 $\deg_{wt}h$. 用 $E^{(t)}(z,\bar{z})$ 和 $f^{(t)}(z,w)$ 分别表示 E 和 f 在 0 的展开式中权为 t 的单项式的和.

对于 $1 \leq k \leq n$，记 $u_k = \sum_{i=1}^{k} |z_i|^2$，且对于 $2 \leq k \leq n$，令 $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} |z_i|^2 - |z_k|^2$. 我们也记 $u = u_n = |z|^2$. 在下文中，我们有如下的约定：当 $j > l$ 时，$\sum_{p=j}^{l} a_p$ 定义为 0.

首先，证明下面的基本引理：

引理 4.2.1 $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{|z_1|^2, \cdots, |z_n|^2\} = \mathrm{Span}\{u, v_2, \cdots, v_n\}$. 进一步，对每个固定的 i 满足 $1 \leq i \leq n$，$|z_i|^2$ 能唯一地由 $u, v_2, \cdots, v_n$ 线性表示：

$$\begin{cases} |z_1|^2 = 2^{1-n}\left(u + \displaystyle\sum_{h=2}^{n} 2^{n-h} v_h\right), \\ |z_i|^2 = 2^{-(n+1-i)}\left(u + \displaystyle\sum_{h=i+1}^{n} 2^{n-h} v_h - 2^{n-i} v_i\right), \quad \text{对于 } 2 \leq i \leq n. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

证 由直接的计算，有

$$\begin{aligned} & 2^{1-n}\left(u + \sum_{h=2}^{n} 2^{n-h} v_h\right) \\ & = 2^{1-n}\left[\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 + \sum_{h=2}^{n} 2^{n-h}\left(\sum_{i=1}^{h-1} |z_i|^2 - |z_h|^2\right)\right] \\ & = 2^{1-n}\left[\left(1 + \sum_{h=2}^{n} 2^{n-h}\right)|z_1|^2\right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=2}^{n-1}\left(1 + \sum_{h=j+1}^{n} 2^{n-h} - 2^{n-j}\right)|z_j|^2\right] \\ & = 2^{1-n}(2^{n-1}|z_1|^2) = |z_1|^2; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&2^{-(n+1-i)}\left(u+\sum_{h=i+1}^{n}2^{n-h}v_h-2^{n-i}v_i\right)\\
&\quad=2^{-(n+1-i)}\left[\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2+\sum_{h=i+1}^{n}2^{n-h}\left(\sum_{j=1}^{h-1}|z_j|^2-|z_h|^2\right)\right.\\
&\qquad\left.-2^{n-i}\left(\sum_{j=1}^{i-1}|z_j|^2-|z_i|^2\right)\right]\\
&\quad=|z_i|^2,\quad 对于\ i\geq 2.
\end{aligned}
$$

因此有 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{|z_1|^2,\cdots,|z_n|^2\}=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{u,v_2,\cdots,v_n\}$. 引理的唯一性显然. ■

对于 $(\mathbb{C}^n,0)$ 到自身的一个形式 (全纯) 变换 $f(z,w)$，我们记

$$
\begin{cases}
f(z,w)=\big(f_1(z,w),\cdots,f_n(z,w)\big),\\
f_k(z,w)=\displaystyle\sum_{(i_1,\cdots,i_n)}f_{k,(I)}(w)z^I,\\
\qquad I=(i_1,\cdots,i_n)\ 且\ z^I=z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n}.
\end{cases}
\tag{4.2.2}
$$

假设 $E(z,\bar z)$ 是一个形式幂级数，满足 $E(0)=0$. 现在证明如下引理：

引理 4.2.2 $E(z,\bar z)$ 有如下展开：

$$
\begin{aligned}
E(z,\bar z)&=\sum_{\{i_k\cdot j_k=0,\ k=1\cdots,n\}}E_{(I,J)}(u,v_2,\cdots,v_n)z^I\overline{z}^J\\
&=\sum_{\{i_k\cdot j_k=0,\ k=1,\cdots,n\}}E_{(I,J)}^{(K)}z^I\overline{z}^Ju^{k_1}{v_2}^{k_2}\cdots{v_n}^{k_n}.
\end{aligned}
\tag{4.2.3}
$$

这里且在本章下文中，总是记 $I=(i_1,\cdots,i_n)$，$J=(j_1,\cdots,j_n)$，$K=(k_1,\cdots,k_n)$，$z^I=z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n}$ 且 $\overline{z}^J=\overline{z}_1^{j_1}\cdots\overline{z}_n^{j_n}$. 进一步，$E_{(I,J)}^{(K)}$ 的系数由 E 唯一决定.

证 由引理 4.2.1 有，$\{|z_i|^2\}_{i=1}^n$ 和 $\{u,v_2,\cdots,v_n\}$ 可以相互唯一表示，我们有 (4.2.3) 中展开的存在性. 要证明引理 4.2.2，只需要证明如下的断言：

$$
\sum_{(I,J,K)\in A(N,N^*)}E_{(I,J)}^{(K)}z^I\overline{z}^J|z_1|^{2k_1}\cdots|z_n|^{2k_n}=0\ 当且仅当\ E_{(I,J)}^{(K)}\equiv 0.
$$

其中，我们定义

$$A(N,N^*)=\Big\{(I,J,K)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n,\ 对所有的\ 1\le l\le n,\\ 都有\ i_l\cdot j_l=0,\ i_l,j_l,k_l\ge 0\ ,\ 且\sum_{l=1}^{n}(i_l+k_l)=N,\\ \sum_{l=1}^{n}(j_l+k_l)=N^*\Big\}.$$

假设 $P=(p_1,\cdots,p_n)$, $Q=(q_1,\cdots,q_n)$，其中 $p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots,q_n$ 为满足 $|P|=N$, $|Q|=N^*$ 的非负整数. 我们定义

$$A(N,N^*;P,Q)=\big\{(I,J,K)\in A(N,N^*):\ 对所有的\ 1\le l\le n,\\ 都有\ i_l\cdot j_l=0,\ i_l,j_l,k_l\ge 0,\ i_l+k_l=p_l,\\ j_l+k_l=q_l\big\}.$$

现在，假设

$$\sum_{(I,J,K)\in A(N,N^*)}E_{(I,J)}^{(K)}z^I\overline{z}^J|z_1|^{2k_1}\cdots|z_n|^{2k_n}=0.$$

那么有

$$\sum_{(I,J,K)\in A(N,N^*;P,Q)}E_{(I,J)}^{(K)}\equiv 0,\ 对所有满足\ |P|=N,\\ |Q|=N^*\ 的\ P,Q\ 都成立.$$

接着我们断言 $A(N,N^*;P,Q)$ 中至多含有一个元素. 事实上，对于 $1\le l\le n$，$(I,J,K)\in A(N,N^*;P,Q)$ 当且仅当

$$i_l+k_l=p_l,\quad j_l+k_l=q_l,\quad i_l\cdot j_l=0.$$

现在，如果 $i_l=0$，那么 $k_l=p_l$. 因为 $j_l=q_l-p_l\ge 0$，所以在这种情况下，$q_l\ge p_l$. 如果 $j_l=0$，那么 $k_l=q_l$. 因为 $i_l=p_l-q_l\ge 0$，所以在这种情况下，$p_l\ge q_l$. 因此，当 $p_l\ne q_l$ 时，i_l,j_l 由 p_l 和 q_l 唯一决定. 当 $p_l=q_l$ 时，容易看出 $i_l=j_l=0$, $k_l=q_l=p_l$. 这样就完成了断言的证明. 因此引理 4.2.2 成立. ■

现在假设 $M\subset\mathbb{C}^{n+1}$ 是一个形式流形，由如下方程定义:

$$w=|z|^2+E(z,\bar{z}),\tag{4.2.4}$$

其中 E 为 $(z,\bar{z})$ 的 $\mathrm{Ord}(E)\geq 3$ 的形式幂级数. 对 (4.2.4)，我们有如下关于 (z,w) 的形式幂级数变换:

$$\begin{cases} z'=F=z+f(z,w), & \mathrm{Ord}_{wt}(f)\geq 2, \\ w'=G=w+g(z,w), & \mathrm{Ord}_{wt}(g)\geq 3. \end{cases} \tag{4.2.5}$$

记 $e_j\in\mathbb{Z}^n$ 为第 j 个位置为 1、其他位置为 0 的向量. 现在给出 $(M,0)$ 的如下形式拟正规型:

定理 4.2.1 存在唯一一个形如 (4.2.5) 的形式变换满足正规性条件

$$\begin{cases} f_{i,(0)}(u)=0, \quad 1\leq i\leq n; \\ f_{i,(e_j)}(u)=0 \text{ 对于 } 1\leq j<i\leq n; \\ f_{1,(e_1)}(u)=0, \quad \mathrm{Im}\left(f_{i,(e_i)}(u)\right)=0 \text{ 对于 } 2\leq i\leq n, \end{cases} \tag{4.2.6}$$

且把 M 变换到一个由如下拟正规型方程定义的形式子流形:

$$w'=|z'|^2+\varphi(z',\overline{z'}), \tag{4.2.7}$$

其中 $\varphi=O(|z'|^3)$，φ 有如下的唯一展开:

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum_{i_l\cdot j_l=0,\ l=1,\cdots,n}\varphi_{(I,J)}z^I\overline{z}^J \\ &= \sum_{i_k\cdot j_k=0,\ k=1,\cdots,n}\varphi_{(I,J)}^{(K)}z^I\overline{z}^J u^{k_1}{v_2}^{k_2}\cdots {v_n}^{k_n},\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

且对任意的 $k\geq 0$, $l\geq 1$, $\tau\geq 2$，下述正规化条件满足:

$$\begin{cases} \varphi_{(0,0)}^{(\tau e_1)}=0; \\ \mathrm{Re}(\varphi_{(0,0)}^{(le_1+e_i)})=0, \text{ 对于 } 2\leq i\leq n; \\ \varphi_{(e_i,e_j)}^{(le_1)}=0, \text{ 对于 } i>j; \\ \varphi_{(I,0)}^{(le_1)}=\varphi_{(0,I)}^{(le_1)}=\varphi_{(0,I)}^{(ke_1+e_j)}=0, \text{ 对于 } |I|\geq 1; \\ \varphi_{(I,e_h)}^{(ke_1)}=0, \text{ 对于 } h\geq 1,\ |I|\geq 2,\ i_h=0; \\ \varphi_{(0,I)}^{(0)}=\overline{\varphi_{(I,0)}^{(0)}}, \quad |I|>2. \end{cases} \tag{4.2.9}$$

证 只需要证明在 (4.2.6) 和 (4.2.9) 的正规性条件下，下述以

(f, g, φ) 为未知数的方程有唯一的解:

$$w + g(z,w) = \sum_{i=1}^{n} \big(z_i + f_i(z,w)\big)\big(\bar{z}_i + \overline{f_i(z,w)}\big) + \varphi\big(z + f(z,w), \bar{z} + \overline{f(z,w)}\big). \tag{4.2.10}$$

合并上述方程中次数为 t 的项，我们得到，对任意的 $t \geq 3$,

$$E^{(t)}(z,\bar{z}) + g^{(t)}(z,u) = 2\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{n} \big(\overline{z_i} f_i^{(t-1)}(z,u)\big) + \varphi^{(t)}(z,\bar{z}) + I^{(t)}(z,\bar{z}), \tag{4.2.11}$$

这里，$I^{(t)}(z,\bar{z})$ 是一个次数为 t 的齐次多项式，且只依赖于 $g^{(\sigma)}, f^{(\sigma-1)}, \varphi^{(\sigma)}$，其中 $\sigma < t$. 因此，由归纳法，只需要证明在上面的正规型条件下可唯一地求解下述方程:

$$\Gamma(z,\bar{z}) + g(z,u) = 2\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} f_i(z,u)\right) + \varphi(z,\bar{z}). \tag{4.2.12}$$

事实上，如果能求解 (4.2.12)，那么能从 (4.2.11) 开始，令 $t = 3$ 且 $\Gamma = E^{(3)}$. 这样我们得到 $(F^{(2)}, G^{(3)})$. 现在，用

$$H_2 = (z,w) + (F^{(2)}, G^{(3)})$$

来变换 M. 这样新的流形正规化到次数 3. 假设

$$H = (F,G) = \big(z + O_{wt}(3), w + O_{wt}(4)\big)$$

是正规化了的映射. 在 (4.2.11) 中令 $t = 4$. 可以唯一地决定 $(F^{(3)}, G^{(4)})$. 用 $H_2 = (z,w) + (F^{(3)}, G^{(4)})$ 来变换流形，我们得到一个正规化到 4 的流形. 这样定理 4.2.1的存在性证明可以用归纳性证明.

把 Γ 和 φ 如同 (4.2.3) 和 (4.2.8) 那样展开，且把 f, g 如同 (4.2.2) 那样展开. 利用引理 4.2.2，考虑 (4.2.12) 中满足 $i_l \cdot j_l = 0$, $l = 1, \cdots, n$ 的 $z^I \overline{z}^J$ 项，得到下面的方程组:

$$z^0\overline{z}^0: \ -g_{(0)} + \sum_{i=1}^{n} 2\mathrm{Re}\left(|z_i|^2 f_{i,(e_i)}\right) + \varphi_{(0,0)} = \Gamma_{(0,0)}; \tag{4.2.13}$$

$$z_j, \overline{z_j}: \begin{cases} -g_{(e_j)} + \overline{f_{j,(0)}} + \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 f_{i,(e_i+e_j)} + \varphi_{(e_j,0)} = \Gamma_{(e_j,0)}, \\ f_{j,(0)} + \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \overline{f_{i,(e_i+e_j)}} + \varphi_{(0,e_j)} = \Gamma_{(0,e_j)}, \end{cases}$$

对于 $1 \le j \le n$;　　(4.2.14)

$$z_i\overline{z_j}: \begin{cases} f_{j,(e_i)} + \overline{f_{i,(e_j)}} + \varphi_{(e_i,e_j)} = \Gamma_{(e_i,e_j)}, \\ \overline{f_{j,(e_i)}} + f_{i,(e_j)} + \varphi_{(e_j,e_i)} = \Gamma_{(e_j,e_i)}, \end{cases}$$

对于 $i \ne j$;　　(4.2.15)

$$z_i\overline{z}^J, z^J\overline{z_i}: \begin{cases} \overline{f_{i,(J)}} + \varphi_{(e_i,J)} = \Gamma_{(e_i,J)}, \\ f_{i,(J)} + \varphi_{(J,e_i)} = \Gamma_{(J,e_i)}, \end{cases}$$

对于 $|J| \ge 2,\ j_i = 0$;　(4.2.16)

$$z^I, \overline{z}^I: \begin{cases} -g_{(I)} + \sum_{i=1}^{n} \left(|z_i|^2 f_{i,(I+e_i)}\right) + \varphi_{(I,0)} = \Gamma_{(I,0)}, \\ \sum_{i=1}^{n} \left(|z_i|^2 \overline{f_{i,(I+e_i)}}\right) + \varphi_{(0,I)} = \Gamma_{(0,I)}, \end{cases}$$

对于 $|I| \ge 2$;　　(4.2.17)

$$z^I\overline{z}^J: \ \varphi_{(I,J)} = \Gamma_{(I,J)} \text{ 对于 } |I|, |J| \ge 2,\ i_l \cdot j_l = 0, \quad l = 1, \cdots, n. \tag{4.2.18}$$

这里，我们详细求解 (4.2.17)．其他方程组可同样求解 (事实上，更简单).

首先把 (4.2.1) 代入 (4.2.17)，然后分别合并关于 $v_2, \cdots, v_n$ 的 0 次项、1 次项和高次项，同时把 u 看成一个参数．由引理 4.2.2，有如下的方程组：

$$\sum_k \Gamma_{(I,0)}^{(ke_1)} u^k = -g_{(I)}(u) + 2^{1-n} u f_{1,(I+e_1)} + \sum_{i=2}^{n} 2^{i-1-n} u f_{i,(I+e_i)} + \sum_k \varphi_{(I,0)}^{(ke_1)} u^k; \tag{4.2.19}$$

$$\sum_k \Gamma_{(I,0)}^{(ke_1+e_j)} u^k = 2^{1-j} f_{1,(I+e_1)} + \sum_{i=2}^{j-1} 2^{i-1-j} f_{i,(I+e_i)} - 2^{-1} f_{j,(I+e_j)} + \sum_k \varphi_{(I,0)}^{(ke_1+e_j)} u^k, \quad j \geq 2; \tag{4.2.20}$$

$$\varphi_{(I,0)}^{(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n)} = \Gamma_{(I,0)}^{(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n)}, \quad k_2+\cdots+k_n \geq 2; \tag{4.2.21}$$

$$\sum_k \Gamma_{(0,I)}^{(ke_1)} u^k = 2^{1-n} u\overline{f_{1,(I+e_1)}} + \sum_{i=2}^{n} 2^{i-1-n} u\overline{f_{i,(I+e_i)}} + \sum_k \varphi_{(0,I)}^{(ke_1)} u^k; \tag{4.2.22}$$

$$\sum_k \Gamma_{(0,I)}^{(ke_1+e_j)} u^k = 2^{1-j} \overline{f_{1,(I+e_1)}} + \sum_{i=2}^{j-1} 2^{i-1-j} \overline{f_{i,(I+e_i)}} - 2^{-1} \overline{f_{j,(I+e_j)}} + \sum_k \varphi_{(0,I)}^{(ke_1+e_j)} u^k, \quad j \geq 2; \tag{4.2.23}$$

$$\varphi_{(0,I)}^{(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n)} = \Gamma_{(0,I)}^{(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n)}, \quad k_2+\cdots+k_n \geq 2. \tag{4.2.24}$$

利用 φ 的正规化条件且在 (4.2.19), (4.2.22) 中令 $u=0$，得到

$$\Gamma_{(I,0)}^{(0)} = -g_{(I)}(0) + \varphi_{(I,0)}^{(0)}, \quad \Gamma_{(0,I)}^{(0)} = \varphi_{(0,I)}^{(0)}.$$

由正规化条件，$\varphi_{(I,0)}^{(0)} = \overline{\varphi_{(0,I)}^{(0)}}$，得到 $\varphi_{(I,0)}^{(0)} = \overline{\Gamma_{(I,0)}^{(0)}}$ 且

$$g_{(I)}(0) = \overline{\Gamma_{(0,I)}^{(0)}} - \Gamma_{(I,0)}^{(0)}. \tag{4.2.25}$$

在 (4.2.23) 中分别令 $j=2,\cdots,n$，然后把它们和 (4.2.22) 一起加起来. 由正规化条件 $\varphi_{(0,I)}^{(le_1)} = \varphi_{(I,0)}^{(ke_+e_j)} = 0$ 对所有的 $k \geq 0$, $l \geq 1$ 成立，得到

$$f_{1,(I+e_1)}(u) = \sum_{k\geq 1} \overline{\Gamma_{(0,I)}^{(ke_1)}} u^{k-1} + \sum_{k\geq 0}\sum_{j=2}^{n} \overline{\Gamma_{(0,I)}^{(ke_1+e_j)}} u^k. \tag{4.2.26}$$

在 (4.2.20) 中减去 (4.2.23) 的复共轭，有

$$\varphi_{(I,0)}^{(ke_1+e_j)} = \Gamma_{(I,0)}^{(ke_1+e_j)} - \overline{\Gamma_{(0,I)}^{(ke_1+e_j)}}, \quad j \geq 2,\ k \geq 0. \tag{4.2.27}$$

由 (4.2.19) 和 (4.2.23)，类似地，可以得到

$$g_{(I)}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\overline{\Gamma_{(0,I)}^{(ke_1)}}-\Gamma_{(I,0)}^{(ke_1)}\right)u^k,\quad |I|\geq 2. \tag{4.2.28}$$

回到 (4.2.23)，可以归纳地得到

$$\begin{aligned}f_{j,(I+e_j)}(u)=&\sum_{k\geq 1}\overline{\Gamma_{(0,I)}^{(ke_1)}}u^{k-1}\\&+\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{n-j-1}\overline{\Gamma_{(0,I)}^{(ke_1+e_{n-i})}}-\overline{\Gamma_{(0,I)}^{(ke_1+e_j)}}\right)u^k,\\&\qquad 2\leq j\leq n.\end{aligned} \tag{4.2.29}$$

同理，由 (4.2.13)，有

$$g_{(0)}(u)=\sum_{k\geq 2}\left(-\Gamma_{(0,0)}^{(ke_1)}u^k\right)-\mathrm{Re}\left(\sum_{k\geq 1;\ j=2,\cdots,n}\Gamma_{(0,0)}^{(ke_1+e_j)}u^{k+1}\right); \tag{4.2.30}$$

$$f_{h,(e_h)}(u)=\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\left(-\sum_{j=2}^{h-1}\mathrm{Re}\left(\Gamma_{(0,0)}^{(ke_1+e_j)}u^k\right)-2\mathrm{Re}\left(\Gamma_{(0,0)}^{(ke_1+e_h)}u^k\right)\right),\quad h\geq 2; \tag{4.2.31}$$

$$\varphi_{(0,0)}=\Gamma_{(0,0)}-\sum_{k\geq 2}\Gamma_{(0,0)}^{(ke_1)}u^k-\mathrm{Re}\left(\sum_{k\geq 1,j=2,\cdots,n}\Gamma_{(0,0)}^{(ke_1+e_j)}u^k v_j\right). \tag{4.2.32}$$

从 (4.2.14)，得到

$$f_{1,(e_1+e_j)}(u)=\sum_{k\geq 1}\overline{\Gamma_{(0,e_j)}^{(ke_1)}}u^{k-1}+\sum_{k\geq 0}\sum_{i=2}^{n}\overline{\Gamma_{(0,e_j)}^{(ke_1+e_i)}}u^k; \tag{4.2.33}$$

$$\begin{aligned}f_{i,(e_j+e_i)}(u)=&\sum_{k\geq 1}\overline{\Gamma_{(0,e_j)}^{(ke_1)}}u^{k-1}\\&+\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{l=0}^{n-i-1}\overline{\Gamma_{(0,e_j)}^{(ke_1+e_{n-l})}}-\overline{\Gamma_{(0,e_j)}^{(ke_1+e_i)}}\right)u^k,\\&\qquad \text{对于 } 2\leq i\leq n;\end{aligned} \tag{4.2.34}$$

$$g_{(e_j)}(u)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\overline{\Gamma_{(0,e_j)}^{(ke_1)}}-\Gamma_{(e_j,0)}^{(ke_1)}\right)u^k; \tag{4.2.35}$$

$$\varphi_{(e_j,0)}^{(ke_1+e_l)}=\Gamma_{(e_j,0)}^{(ke_1+e_l)}-\overline{\Gamma_{(0,e_j)}^{(ke_1+e_l)}},\quad l\geq 2,\ k\geq 0;\tag{4.2.36}$$

$$\varphi_{(e_j,0)}^{(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n)}=\Gamma_{(e_j,0)}^{(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n)},\quad k_2+\cdots+k_n\geq 2;\tag{4.2.37}$$

$$\varphi_{(0,e_j)}^{(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n)}=\Gamma_{(0,e_j)}^{(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n)},\quad k_2+\cdots+k_n\geq 2.\tag{4.2.38}$$

从 (4.2.15)，有

$$f_{i,(e_j)}(u)=\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma_{(e_j,e_i)}^{(ke_1)}u^k,\quad i<j;\tag{4.2.39}$$

$$\varphi_{(e_i,e_j)}^{ke_1}=\Gamma_{(e_i,e_j)}^{(ke_1)}-\overline{\Gamma_{(e_j,e_i)}^{(ke_1)}},\quad i<j,\ k\geq 1;\tag{4.2.40}$$

$$\varphi_{(e_i,e_j)}^{(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n)}=\Gamma_{(e_i,e_j)}^{(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n)},\quad \text{对于 } k_2+\cdots+k_n\geq 1.\tag{4.2.41}$$

由 (4.2.16)，可以得到

$$f_{i,(J)}(u)=\sum_{k\geq 0}\Gamma_{(J,e_i)}^{(ke_1)}u^k,\quad 1\leq i\leq n,\tag{4.2.42}$$

$$\varphi_{(e_i,J)}^{(ke_1)}=\Gamma_{(e_i,J)}^{(ke_1)}-\overline{\Gamma_{(J,e_i)}^{(ke_1)}},\quad 1\leq i\leq n,\ k\geq 0,\tag{4.2.43}$$

$$\varphi_{(J,e_i)}^{(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n)}=\Gamma_{(J,e_i)}^{(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n)},\quad k_2+\cdots+k_n\geq 1,\tag{4.2.44}$$

$$\varphi_{(e_i,J)}^{(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n)}=\Gamma_{(e_i,J)}^{(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n)},\quad k_2+\cdots+k_n\geq 1,\tag{4.2.45}$$

其中 $|J|\geq 2$ 且 $j_i=0$.

归纳上面得到的解，我们有如下的解 (也可以直接证明它们确实为 (4.2.12) 的解且满足 (4.2.6) 和 (4.2.9)) 中的正规化条件:

$$\begin{aligned}F_1(z,u)&=z_1+f_1(z,u)\\&=z_1+\sum_{k\geq 0,j_1=0,|J|\geq 1}z^J\Gamma_{(J,e_1)}^{(ke_1)}u^k+\sum_{|I|\geq 1}z^{I+e_1}S_I^{(1)},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_h(z,u) &= z_h + f_h(z,u) \\
&= z_h + \frac{1}{2} z_h \sum_{k\geq 1} \Big(-\sum_{j=2}^{h-1} \mathrm{Re}\big(\Gamma_{(0,0)}^{(ke_1+e_j)} u^k\big) - 2\mathrm{Re}\big(\Gamma_{(0,0)}^{(ke_1+e_h)} u^k\big)\Big) \\
&\quad + \sum_{k\geq 1,\ i>h} z_i \Gamma_{(e_i,e_h)}^{(ke_1)} u^k + \sum_{k\geq 0,\ j_h=0,\ |J|\geq 2} z^J \Gamma_{(J,e_h)}^{(ke_1)} u^k \\
&\quad + \sum_{|I|\geq 1} z^{I+e_h} S_I^{(h)}, \quad n \geq h \geq 2, \\
G(z,u) &= u + g(z,u) \\
&= u + \Big(-\sum_{k\geq 2} \Gamma_{(0,0)}^{(ke_1)} u^k - \mathrm{Re}\Big(\sum_{k\geq 1,\ j=2,\cdots,n} \Gamma_{(0,0)}^{(ke_1+e_j)} u^{k+1} \Big)\Big) \\
&\quad + \sum_{k\geq 0,\ |I|\geq 1} z^I u^k \left(\overline{\Gamma_{(0,I)}^{(ke_1)}} - \Gamma_{(I,0)}^{(ke_1)} \right), \\
\varphi(z,\bar{z}) &= \Gamma(z,\bar{z}) + g(z,u) - 2\mathrm{Re}\Big(\sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} f_i(z,u) \Big),
\end{aligned}
\tag{4.2.46}
$$

其中

$$
\begin{cases}
S_I^{(1)} = \sum_{k\geq 1} \overline{\Gamma_{(0,I)}^{(ke_1)}} u^{k-1} + \sum_{k\geq 0} \sum_{i=2}^{n} \overline{\Gamma_{(0,I)}^{(ke_1+e_i)}} u^k, \\
S_I^{(h)} = \sum_{k\geq 1} \overline{\Gamma_{(0,I)}^{(ke_1)}} u^{k-1} + \Big(\sum_{k\geq 0} \sum_{i=0}^{n-h-1} \overline{\Gamma_{(0,I)}^{(ke_1+e_{n-i})} u^k} \Big) \\
\qquad - \sum_{k\geq 0} \overline{\Gamma_{(0,I)}^{(ke_1+e_h)}} u^k, \quad 2 \leq h \leq n.
\end{cases}
\tag{4.2.47}
$$

这样就完成了定理 4.2.1 的证明. ∎

假设 $(M,0)$ 由 (4.2.4) 定义. 称 $(M^*,0)$ 是 $(M,0)$ 的一个**形式拟正规型**，如果 $(M^*,0)$ 形式等价于 $(M,0)$ 且 M^* 由 $w = |z|^2 + \varphi$ 定义，其中 φ 满足 (4.2.12) 中的正规化条件. 注意到 $(M,0)$ 的拟正规型不是唯一的. 进一步，我们有如下的说明：

注 4.2.1 (1) 定理 4.2.1 中的拟正规型同时包含着所研究点的奇异 CR 结构和部分强拟凸 CR 结构的性质. 比如 $\mathbb{C}^3$ 中由下述拟

正规型方程给出的子流形:

$$M:\ w = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\sum_{j_1+j_2\geq 3}(a_{j_1j_2}z_1^{j_1}z_2^{j_2}) + \sum_{j_1\geq 2,\ j_2\geq 2} b_{j_1\overline{j_2}}z_1^{j_1}\overline{z_2}^{j_2}. \tag{4.2.48}$$

这里调和项 $\mathrm{Re}\sum_{j_1+j_2\geq 3}(a_{j_1j_2}z_1^{j_1}z_2^{j_2})$ 代表 M 在 0 点的 CR 结构性质，这个项类似于 Moser 在 [Mos85] 中拟正规型的 CR 奇异性. 混合项 $\sum_{j_1\geq 2, j_2\geq 2} b_{j_1\overline{j_2}}z_1^{j_1}\overline{z_2}^{j_2}$ 则包含着 0 点的部分 CR 结构，类似于 Chern-Moser 在 CR 情形 [CM74] 中的正规型 (即(1.1.3)).

(2) 假设 M 在 0 点附近由方程 $w = |z|^2 + E(z,\overline{z})$ 所定义，其中 $\mathrm{Ord}(E)\geq 3$ 且 $\overline{E(z,\overline{z})} = E(z,\overline{z})$. 把 M 映到定理 4.2.1 中正规型的映射 $H(z,w) = (F(z,w), G(z,w))$，它的 w- 部分 $G(z,u)$ 只是 u 的函数，且由公式 (4.2.46)，是一个形式实值. 这是因为 (4.2.46) 中的 Γ 在定理 4.2.1 的证明的每一个步骤里都是形式实值的. 因此，在 M 的拟正规型中，由定理 4.2.1 得到 φ 也是形式实值. 然而，不同于二维情形的是，这对一般的 M 不再成立. 事实上，我们在定理 1.2.6 得到 M 能形式平坦化当且仅当它的拟正规型是一个形式实值函数.

4.3 用二次曲面的自同构对全纯映照正规化

在这一节里，首先计算 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中由 $w = \sum_{i=1}^{n}|z_i|^2$ 定义的模型空间 M_∞ 的保原点自同构群. 记 $\mathrm{Aut}_0(M_\infty)$ 为 $(M_\infty, 0)$ 的全纯自同构群. 我们有如下的命题:

命题 4.3.1 $\mathrm{Aut}_0(M_\infty)$ 由 (4.3.1) 或 (4.3.2) 构成:

$$\begin{cases} z' = b(w)\Bigg[wa(w) - \dfrac{\langle z,\bar{a}(w)\rangle}{\langle a(w),\bar{a}(w)\rangle}a(w) + \sqrt{1-wa(w)\bar{a}(w)} \\ \qquad \left(z - \dfrac{\langle z,\bar{a}(w)\rangle}{\langle a(w),\bar{a}(w)\rangle}a(w)\right)\Bigg]\dfrac{1}{1-\langle z,\bar{a}(w)\rangle}U(w), \\ w' = b(w)\bar{b}(w)w, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

$$(z', w') = \big(b(w)zU(w), b(w)\bar{b}(w)w\big), \tag{4.3.2}$$

其中 $a=(a_1,\cdots,a_n)$，$\sum_{j=1}^n a_j(0)\bar{a}_j(0)<1$，$\langle z,\bar{a}\rangle=\sum_{i=1}^n \overline{a_i}z_i$，$b(0)\neq 0$，$a(0)\neq 0$，$U(\mathrm{Re}(w))$ 是一个酉矩阵，$a(w),b(w),U(w)$ 是 w 的全纯函数.

证　记 $w=x+\sqrt{-1}y$，并记 $(F,G)\in \mathrm{Aut}_0(M_\infty)$. 如果 $z\approx 0$，则 $\mathrm{Im}(G(z,|z|^2))\equiv 0$. 因为 M_∞ 界住 0 点附近如下定义的一簇圆盘：

$$B_r=\left\{(z,w)\in\mathbb{C}^{n+1}: w=x+\sqrt{-1}y,\ y=0,\ x=r^2\geq |z^2|\right\}.$$

可以看出 $\mathrm{Im}\big(G(z,x)\big)\equiv 0$，如果 $z\approx 0$ 且 $x(\in\mathbb{R})\approx 0$. 因此，$G(z,w)=G(w)=cw+o(w)$ $(c>0)$ 不依赖于 z 且当 $w=x$ 为实值时取实值.

这样对任意的 $r>0$，$F(z,r^2)$ 是一个从 $|z|^2<r^2$ 到 $|z|^2<G(r^2)$ 的双全纯变换. 利用单位球的显式表达式 (参见 [Rud80])，要么

$$\begin{aligned}F(z,r^2)=\sqrt{G(r^2)}\Bigg[&a(r)-\frac{\langle\frac{z}{r},\bar{a}(r)\rangle}{\langle a(r),\bar{a}(r)\rangle}a(r)\\&+v\left(\frac{z}{r}-\frac{\langle\frac{z}{r},\bar{a}(r)\rangle}{\langle a(r),\bar{a}(r)\rangle}a(r)\right)\Bigg]\frac{1}{1-\langle\frac{z}{r},\bar{a}(r)\rangle}U(r),\end{aligned}\tag{4.3.3}$$

其中 $U(r)$ 是一个酉矩阵且 $v=\sqrt{1-a(r)\bar{a}(r)}$，$a\neq 0$，要么

$$F(z,r^2)=\sqrt{G(r^2)}\left(\frac{z}{r}\right)U(r).\tag{4.3.4}$$

记 $G(x)=xb(x)\bar{b}(x)$ 满足 $b(0)\neq 0$ 且 $b(w)$ 关于 w 全纯. 在 (4.3.4) 的情况下，$F(z,x)=b(x)zU(r)\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta(x)}$ 是实解析的，其中 $\theta(x)$ 是 x 的取实值的实解析函数. 因此，$b(x)U(r)\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta(x)}$ 是 F 关于 z 的 Jacobi 矩阵. 因为 $\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta(x)}$ 和 $b(x)(\neq 0)$ 同为 $x\approx 0$ 时的实解析函数，我们得到 $U(r)$ 为 x 的实解析函数. 所以 $U(w)$ 为 w 的解析函数. 记 $U(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}$ 仍为 $U(x)$. 我们得到命题 4.3.1在 (4.3.2) 情况下的证明.

若 $a \neq 0$，仍记 $G(w) = wb(w)\bar{b}(w)$ 且 $b(0) \neq 0$，我们有

$$F(z,r^2) = b(r^2)\left[ra(r) - \frac{\langle z, \bar{a}(r)\rangle}{\langle a(r), \bar{a}(r)\rangle}a(r) + v\left(z - \frac{\langle z, \bar{a}(w)\rangle}{\langle a(r), \bar{a}(r)\rangle}a(r)\right)\right]\frac{1}{1 - \langle z, \frac{\bar{a}(r)}{r}\rangle}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}U(r).$$

因为 $f(z,w)$ 关于 (z,w) 全纯且 $f(0,w) = b(w)\sqrt{w}a(\sqrt{w})U^*(\sqrt{w})$ 满足 $U^* = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}U$，所以 $\sqrt{w}a(\sqrt{w})U^*(\sqrt{w})$ 关于 w 全纯. 特别地，$|a(\sqrt{w})|^2$ 关于 w 全纯. 进一步，

$$\frac{\partial F}{\partial z_i}(0,w) = b(w)\left(\frac{|a|^2 - v - 1}{|a|^2}\overline{a_i}a + ve_i\right)U^*(\sqrt{w})$$

是解析的. 因为 $\sqrt{w}a(\sqrt{w})U^*(\sqrt{w})$ 实解析的，所以

$$\left(\frac{|a|^2 - v - 1}{|a|^2}\overline{a_i}a + ve_i\right)U^*(\sqrt{w})\overline{U^*(\sqrt{w})}^{\mathrm{t}}\overline{a(\sqrt{w})}^{\mathrm{t}}r = \big((|a|^2 - v - 1) + v\big)r\overline{a_i}$$

也是实解析的，这里 $(\cdot)^{\mathrm{t}}$ 表示矩阵转置. 因为 $(|a|^2 - v - 1) + v = |a|^2 - 1$ 是实解析的，所以 ra_i 和 $\frac{a_i}{r}$ 也关于 w 解析. 由 $\sqrt{w}a(\sqrt{w})U^*(\sqrt{w})$ 和 ra_i 都是实解析的可得 $U^*(\sqrt{w})$ 是实解析的. 仍把 $\frac{a}{r}$ 记为 a ，进一步，我们得到定理中的下述性质：

$$\begin{cases} F(z,w) = b(w)\left[wa(w) - \dfrac{\langle z, \bar{a}(w)\rangle}{\langle a(w), \bar{a}(w)\rangle}a(w) + \sqrt{1 - wa(w)\bar{a}(w)}\left(z - \dfrac{\langle z, \bar{a}(w)\rangle}{\langle a(w), \bar{a}(w)\rangle}a(w)\right)\right]\dfrac{1}{1 - \langle z, \bar{a}(w)\rangle}U^*(w), \\ G(w) = b(w)\bar{b}(w)w. \end{cases}$$

这就完成了命题 4.3.1 的证明. ∎

注 4.3.1 在命题 4.3.1 中，如果让 $a(w), b(w), U(w)$ 为 w 的形式幂级数，其中 $a(0), b(0) \neq 0$ 且 $\langle a(0), \overline{a}(0)\rangle < 1$，$U(x)\cdot U(x)^{\mathrm{t}} = I$，那么 (4.3.1) 和 (4.3.2) 给出了 M_∞ 的形式自同构群，即可能不收敛. 把这样得到的自同构记为 $\mathrm{aut}_0(M_\infty)$. 可以证明 $\mathrm{aut}_0(M_\infty)$ 包含 $(M_\infty, 0)$ 中的所有形式自同构.

现在假设 $H = (F, G)$ 是 $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ 到 $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ 的一个形式等价映射，把形如 $w = |z|^2 + O(|z|^3)$ 的方程定义的形式子流形映到

形如 $w=|z|^2+O(|z|^3)$ 的方程定义的形式子流形. 接下来的引理我们要证明，总是可以通过对 H 从左边复合 $\mathrm{aut}_0(M_\infty)$ 中的一个元素，来得到一个正规化的映射. 这个事实将被用来证明定理 1.2.5. 接下来，我们定义 $v(g,a)=\sqrt{1-g\cdot a(g)\cdot \bar{a}(g)}$.

引理 4.3.1　*存在唯一的一个自同构 $T\in \mathrm{aut}_0(M_\infty)$ 使得 $T\circ H$ 满足 (4.2.6) 中的正规化条件. 当 H 是双全纯时，$T\in \mathrm{Aut}_0(M_\infty)$.*

证　首先，通过复合 $w'=|c|^2w$, $z'=czU$ 这样一个自同构，可以假设 $F=z+O_{wt}(2)$ 且 $G=w+O_{wt}(3)$ (参见 [Hu04]). 这里 c 是一个非零常数，且 U 是一个特定的 $n\times n$ 酉矩阵.

在 (4.3.1) 中令 $b(w)=1$, $a_j=\alpha_j(w)$,

$$a_1=\cdots=a_{j-1}=a_{j+1}=\cdots=a_n=0,$$

且 $U=I$. 我们得到 M_∞ 的如下自同构群:

$$\begin{aligned}T_j=\bigg(&\frac{v(w,\alpha_j)z_1}{1-\bar{\alpha}_jz_j},\cdots,\frac{v(w,\alpha_j)z_{j-1}}{1-\bar{\alpha}_jz_j},\frac{z_j-w\alpha_j}{1-\bar{\alpha}_jz_j},\\&\frac{v(w,\alpha_j)z_{j+1}}{1-\bar{\alpha}_jz_j},\cdots,\frac{v(w,\alpha_j)z_n}{1-\bar{\alpha}_jz_j},w\bigg).\end{aligned}$$

记

$$\begin{cases}H_j=({}_{(j)}F,{}_{(j)}G)=T_j\circ T_{j-1}\circ\cdots\circ T_1\circ H,\\ H_0=H;\\ \alpha_j=\dfrac{{}_{(j-1)}F_{j,(0)}(u)}{{}_{(j-1)}G_{(0)}(u)}\circ\left({}_{(j-1)}G_{(0)}(u)\right)^{-1}.\end{cases}\tag{4.3.5}$$

通过直接计算可得对于 $1\le i\le j$ 有 $({}_{(j)}F)_{i,(0)}(u)=0$. 特别地，对 $1\le i\le n$，有 $({}_{(j)}F)_{i,(0)}(u)=0$.

把 H_n 仍记为 H. 对于 $i<j$，令 $b(w)=1$, $a=0$，且在 (4.3.1) 中定义

$$U_j^i=\begin{pmatrix}I&0&0&0&0\\0&\cos\theta_j^i&0&-\sin\theta_j^i&0\\0&0&I&0&0\\0&\sin\theta_j^i&0&\cos\theta_j^i&0\\0&0&0&0&I\end{pmatrix},$$

其中 $\cos\theta^i_j$ 在第 i 行和第 j 列. 那么可以得到一个自同构 T^i_j. 定义

$$
\begin{aligned}
H^i_j &= ({}^i_jF, {}^i_jG) \\
&= T^i_j \circ \cdots \circ T^i_{i+1} \circ T^{i-1}_n \circ \cdots \circ T^{i-1}_i \circ \cdots \circ T^1_n \circ \cdots \circ T^1_2 \circ H,
\end{aligned}
$$

$$
\theta^i_j = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{({}^{i-1}_{n}F)_{j,(e_i)}}{({}^{i-1}_{n}F)_{i,(e_i)}}\right) \circ \left({}^{i-1}_{n}G_{(0)}(w)\right)^{-1}, & j = i+1; \\ \arctan\left(\dfrac{({}^{i}_{j-1}F)_{j,(e_i)}}{({}^{i}_{j-1}F)_{i,(e_i)}}\right) \circ \left({}^{i}_{j-1}G_{(0)}(w)\right)^{-1}, & j \neq i+1. \end{cases} \tag{4.3.6}
$$

那么可以归纳地证明 H^i_j 满足

$$
({}^i_jF)_{(0)} = 0, \quad ({}^i_jF)_{k,(e_l)} = 0,
$$

$$
\text{对于 } l = i,\ i+1 \le k \le j \text{ 或 } l < i,\ l+1 \le k \le n.
$$

特别地，我们有 H^{n-1}_n 满足

$$
({}^{n-1}_{n}F)_{(0)} = 0, \quad ({}^{n-1}_{n}F)_{i,(e_j)} = 0 \text{ 对于 } 1 \le j < i \le n.
$$

仍把 H^{n-1}_n 记为 H，且定义 $H' = T \circ H = (F', G')$，其中

$$
T = \left(d(w)z, d(w)\bar{d}(w)w\right), \quad d = \frac{1}{F_{1,(e_1)}(w)} \circ \left(G_{(0)}(w)\right)^{-1}.
$$

那么 H' 满足

$$
(F')_{(0)} = 0, \quad (F')_{1,(e_1)} = 1, \quad (F')_{i,(e_j)} = 0 \text{ 对于 } 1 \le j < i \le n.
$$

最后，对上述映射从左边复合下述旋转：

$$
\hat{T} = (z_1, \beta_2 z_2, \cdots, \beta_n z_n, w),
$$

$$
\beta_i = \frac{(\bar{F}')_{i,(e_i)}(w)}{\sqrt{(F')_{i,(e_i)}(w) \cdot (\bar{F}')_{i,(e_i)}(w)}} \circ \left(G'_{(0)}(w)\right)^{-1},
$$

使得 H' 满足 (4.2.6) 中的正规化条件. 这就证明了引理中的存在性部分.

接着，假设 $H = (F, G) = \left(z + O_{wt}(2), w + O_{wt}(3)\right)$ 和

$$
\hat{H} = (\hat{F}, \hat{G}) = T \circ H = \left(z + O_{wt}(2), w + O_{wt}(3)\right)
$$

同时满足正规化条件 (4.2.6). 这里 T 是 M_∞ 的一个自同构. 因为 $T(0, w) = 0$，T 一定为 (4.3.2) 中的形式. 因此，

$$
T = \left(b(w)zU(w), b(w)\bar{b}(w)w\right).
$$

由 $H, \hat{H}$ 满足正规化条件 (4.2.6)，可以得到

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \hat{F}_{2,(e_2)} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \hat{F}_{n,(e_n)} \end{pmatrix} = b\left(G_{(0)}(w)\right)\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & F_{2,(e_2)} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & F_{n,(e_n)} \end{pmatrix} U(G_0(w)), \tag{4.3.7}$$

其中 $U(x)$ 为酉矩阵，且

$$\operatorname{Im}\left(\hat{F}_{i,(e_i)}(0,u)\right) = \operatorname{Im}\left(F_{i,(e_i)}(0,u)\right) = 0.$$

考虑两边第一行的范数，我们得到，如果 $G_{(0)}(w) = \overline{G_{(0)}(w)}$，就有 $b(G_{(0)}(w)) \cdot \bar{b}(G_{(0)}(w)) = 1$. 因为 $G_0(w) = w + o(w)$，所以 $b(w)\bar{b}(w) \equiv 1$，因此 $T = \left(b(w)zU(w), w\right)$. 记

$$b(w)U(w) = \widetilde{U}(w) = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

注意到 $\widetilde{U}$ 在 $w = x$ 是一个下三角的酉矩阵. 因此当 $i \neq j$ 时，一定有 $u_{ii}(w)\overline{u_{ii}}(w) = 1$ 且 $u_{ij} = 0$. 注意到 $u_{11} \equiv 1$ 且

$$\hat{F}_{i,(e_i)}(w) = u_{ii}(w) \cdot F_{i,(e_i)}(w) \text{ 对所有的 } 2 \leq i \leq n \text{ 成立.}$$

因为 $\hat{F}_{i,(e_i)}(x), F_{i,(e_i)}(x) = 1 + o(x)$ 都取实值，我们得到 $u_{ii}(x) = 1$. 这样就完成了引理 4.3.1 唯一性的证明. ■

引理 4.3.2 假设 H 是一个从 $w = |z|^2 + \varphi(z, \bar{z})$ 到 $w' = |z'|^2 + \varphi'(z', \overline{z'})$ 的等价映射，且满足 $H(0) = 0$，这里 φ 和 φ' 都满足正规化条件 (4.2.9). 定义 s, s' 分别为 φ 和 φ' 中不为零项的最小次数，那么 $s = s'$.

证 当 $s \neq s'$ 时，我们希望找到矛盾. 不失一般性，假设 $s < s'$，否则考虑 H^{-1}. 还假设 T 为 M_∞ 的自同构群，使得 $T \circ H$ 满足 (4.2.6) 中的正规化条件. 如果 T 把 $w' = |z'|^2 + \varphi'(z', \overline{z'})$ 变换到 $w'' = |z''|^2 + \varphi''(z'', \overline{z''})$，而且 s'' 为 φ'' 中不为零项的最小次数. 我们断言 $s' = s''$. 否则，不失一般性，可以假设 $s' < s''$.

记 T (关于 (z', w')) 的线性部分为 $(z'' = z'B + Dw',\ w'' = dw')$，其中 $B \in GL(n, \mathbb{C})$, $d \neq 0$. 那么通过直接计算可得

$$\varphi''^{(s')}(z'B, \overline{z'B}) = d \cdot \varphi'^{(s')}(z', z').$$

这样就得到了矛盾.

现在，$T \circ H$ 把 $w = |z|^2 + \varphi$ 变换到 $w'' = |z''|^2 + \varphi''$，其中 $T \circ H, \varphi$ 分别如同 (4.2.6) 和 (4.2.9) 中那样正规化. 同时有 $s < s''$. 注意到现在 $T \circ H$ 把 $w = |z|^2 + \varphi^{(s)}$ 变换到

$$w = |z|^2, \quad \mathrm{mod}\ O\big(|(z_1, \cdots, z_n)|^{s+1}\big).$$

这与定理 4.2.1 中正规型的唯一性矛盾，从而引理 4.3.2 得证. ∎

我们称由 (4.2.4) 定义的实 $2n$ 维形式子流形 $(M, 0)$ 能**形式平坦化**，如果存在一个形式坐标变换 $(z', w') = H(z, w)$ 满足 $H(0) = 0$，使得在新的坐标下，$(M, 0)$ 由形如 $w' = E^*(z', \overline{z'})$ 且满足

$$E^*(z', \overline{z'}) = \overline{E^*(z', \overline{z'})}$$

的形式方程所定义. 对于 $(M, 0)$ 中的正规型 $w = |z|^2 + \varphi(z, \bar{z})$，其中 φ 满足 (4.2.9) 中的正规化条件，称它是一个**平坦的拟正规型**，如果 φ 是形式实值. 有了这些准备工作，现在开始证明定理 1.2.6.

定理 1.2.6 的证明 首先，由注 4.2.1 (2)，有 (i) 和 (ii) 等价. 又 (ii) 为 (iii) 的特殊情况，所以只需要证明如果 (ii) 成立，则必然有 (iii) 也成立. 设 $w = z\bar{z} + \varphi(z, \bar{z})$ 为 M 的任意拟正规型，由 (ii) 知，存在一个从 $w = z\bar{z} + \varphi(z, \bar{z})$ 到一个平坦的拟正规型 $w = z\bar{z} + \varphi'(z, \bar{z})$ 的形式映射 H. 由引理 4.3.1，可以对 H 从左边复合 $\mathrm{aut}_0(M_\infty)$ 中的一个元素 T，使得 $T \circ H$ 满足正规化条件 (4.2.6). 设 T 把 $w = z\bar{z} + \varphi'(z, \bar{z})$ 映到 $w = H(z, \bar{z})$. 注意到，T 把平坦子流形映到一个平坦子流形，从而 H 满足实值条件. 现在由定理 4.2.1，存在满足 (4.2.6) 的正规化映射 H^*，把 $w = H(z, \bar{z})$

映到正规型 $w = z\bar{z} + \varphi''(z,\bar{z})$. 由注 4.2.1，$\varphi''(z,\bar{z})$ 取实值. 这样，就得到了一个满足正规型条件 (4.2.6) 的映射 $H^* \circ T \circ H$，它把开始给定的拟正规型映到一个平坦的拟正规型. 由定理 4.2.1，有 $H^* \circ T \circ H = \mathrm{id}$ 且 $\varphi = \varphi''$，从而定理 1.2.6 得证. ■

注 4.3.2　由定理 1.2.6，可以看出由 (4.2.48) 定义的 M 能平坦化当且仅当对任意的 i, j 有 $b_{i\bar{j}} = \overline{b_{j\bar{i}}}$.

4.4　主要定理的收敛性证明

在这一节，我们用快速迭代法来证明定理 1.2.5. 假设 M 由如下方程定义：

$$w = \Phi(z,\bar{z}) = |z|^2 + E(z,\bar{z}), \tag{4.4.1}$$

其中 $E(z,\xi)$ 是 $z = \xi = 0$ 点附近的全纯函数且消失阶 ≥ 3. 同时假设 $H = (F, G) = (z + f, w + g)$ 是满足 (4.2.5) 中正规型的全纯映照. 定义

$$R = (r_1, r_2, \cdots, r_n) = \left(2^{-\frac{n-2}{2}} r, 2^{-\frac{n-2}{2}} r, 2^{-\frac{n-3}{2}} r, \cdots, 2^{-\frac{1}{2}} r, r\right). \tag{4.4.2}$$

那么

$$|R|^2 = 2^{-(n-2)} r^2 + \sum_{h=2}^{n} \left(2^{-\frac{n-i}{2}} r\right)^2 = 2r^2.$$

现定义区域:

$$\begin{aligned} \Delta_r &= \left\{(z,w):\ |z_i| < r_i,\ |w| < 2r^2\right\}, \\ D_r &= \left\{(z,\xi):\ |z_i| < r_i,\ |\xi_i| < r_i,\ \text{对于 } 1 \leq i \leq n\right\}. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

如果 $E(z,\xi)$ 为定义在 $\overline{D_r}$ 上的全纯函数，我们定义 $E(z,\bar{z})$ 在 D_r 上的范数如下：

$$\|E\|_r = \sup_{(z,\xi)\in D_r} \left|E(z,\xi)\right|. \tag{4.4.4}$$

同时对于定义在 $\overline{\Delta_r}$ 上的全纯映照 $h(z,w)$，定义

$$|h|_r = \sup_{(z,w)\in \Delta_r} \left|h(z,w)\right|. \tag{4.4.5}$$

通过一个伸缩变换 $(z,\xi,w)\longrightarrow(az,a\xi,a^2w)$，可以假设 E 在 $\overline{D_1}$ 上全纯且对一个给定的很小的 $\eta>0$，有 $|E|_1\le\eta$.

假设 H 把 M 映射到二次型 $w'=|z'|^2$. 那么有如下方程:

$$E(z,\bar z)+g(z,\Phi)=2\mathrm{Re}\Big(\sum_{i=1}^n \bar z_i f_i(z,\Phi)\Big)+\big|f(z,\Phi)\big|^2. \qquad (4.4.6)$$

我们考虑以 (f,g,φ) 为未知量的 (4.4.6) 的线性方程:

$$E(z,\bar z)=-g(z,u)+2\mathrm{Re}\Big(\sum_{i=1}^n \bar z_i f_i(z,u)\Big)+\varphi(z,\bar z), \qquad (4.4.7)$$

其中 φ 满足 (4.2.9). 那么 (4.4.7) 的唯一解由公式 (4.2.46) 给出. 然而，我们将对解 (f,g,φ) 作一个截断来简化我们的估计. 假设 $\mathrm{Ord}(E)\ge d\ge 3$，定义

$$\begin{cases} f=\hat f+O_{wt}(2d-3), & \deg_{wt}(\hat f)\le 2d-4,\\ g=\hat g+O_{wt}(2d-2), & \deg_{wt}(\hat g)\le 2d-3, \end{cases} \qquad (4.4.8)$$

并记

$$\hat F=z+\hat f,\quad \hat G=w+\hat g,\quad \hat H=(\hat F,\hat G),$$

且 $\Theta=(\hat F,\hat G)$，定义

$$\hat\varphi(z,\bar z)=E(z,\bar z)+\hat g(z,u)-2\mathrm{Re}\Big(\sum_{i=1}^n \bar z_i \hat f_i(z,u)\Big). \qquad (4.4.9)$$

那么

$$\hat\varphi(z,\bar z)-\varphi(z,\bar z)=O(|z|^{2d-2}).$$

假设 $M'=\Theta(M)$ 由 $w'=|z'|^2+E'(z',\overline{z'})$ 所定义. 选取 r',σ,ϱ,r 使得

$$\frac12<r'<\sigma<\varrho<r\le 1,\quad \varrho=\frac13(2r'+r),\quad \sigma=\frac13(2r'+\varrho).$$

如同 Moser 的文章 [Mos85]，下面的引理将是运用 Moser 中的快速迭代法来证明定理 1.2.5 的关键.

引理 4.4.1 假设 $M: w=|z|^2+E(z,\bar z)$ 满足定理 1.2.5 中的条件且 $\mathrm{Ord}(E)\ge d$，$\hat H$ 和 E' 如上所定义，那么 $\mathrm{Ord}(E')\ge 2d-2$.

证 利用 (4.4.9)，有

$$E'(z',\overline{z'}) = \big(\hat{g}(z,\Phi) - \hat{g}(z,u)\big) - 2\mathrm{Re}\Big(\sum_{i=1}^{n}\overline{z_i}\big(\hat{f}_i(z,\Phi) - \hat{f}_i(z,u)\big)\Big)$$
$$- \big|\hat{f}(z,\Phi)\big|^2 + \hat{\varphi}(z,\bar{z}). \tag{4.4.10}$$

因为 $\mathrm{Ord}(E) \geq d$，由 (4.2.46) 和 (4.2.47)，我们得到 $\mathrm{Ord}(\hat{f}) \geq d-1$ 且 $\mathrm{Ord}(\hat{g}) \geq d$. 因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{Ord}\big(\hat{g}(z,\Phi) - \hat{g}(z,u)\big) &\geq \min\{(d-1)+d, 2d-2\}\\ &= 2d-2,\\ \mathrm{Ord}\big(\hat{f}_i(z,\Phi) - \hat{f}_i(z,u)\big) &\geq \min\{(d-2)+d, 2d-3\}\\ &= 2d-3,\\ \mathrm{Ord}\big(\big|\hat{f}(z,\Phi)\big|^2\big) &\geq 2(d-1) = 2d-2.\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{Ord}(E' - \hat{\varphi}) \geq 2d-2$. 由引理 4.3.2 和假设条件 $w = |z|^2 + E$ 形式等价于 $w = |z|^2$，我们得到 $s = \infty$. 因此 $\mathrm{Ord}(\varphi) \geq 2d-2$，从而引理得证. ■

在估计公式 (4.2.46) 给出的解之前，首先有下述引理：

引理 4.4.2 如果 E 在 $\overline{D_r}$ 中全纯，那么

$$\left|E^{(ke_1)}_{(I,T)}\right| \leq \frac{(k+2)^n\|E\|_r}{R^{I+T}\cdot(2r^2)^k},$$
$$\left|E^{(ke_1+e_j)}_{(I,T)}\right| \leq \frac{2^n(k+2)^n\|E\|_r}{R^{I+T}(2r^2)^{k+1}}.$$

证 这里只给出 $\left|E^{(ke_1)}_{(0,I)}\right|, \left|E^{(ke_1+e_j)}_{(0,I)}\right|$ 的估计，其他项的估计同理可得. 假设

$$E = \sum a_{i_1\cdots i_n j_1\cdots j_n} z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n}\overline{z_1}^{j_1}\cdots\overline{z_1}^{j_1}.$$

由 (4.2.2) 可得

$$E_{(0,I)} = \sum_J a_{j_1\cdots j_n(i_1+j_1)\cdots(i_n+j_n)}|z_1|^{2j_1}\cdots|z_n|^{2j_n}$$

$$= \sum_J \left\{ a_{J(I+J)} \left[2^{1-n} \left(u + \sum_{i=2}^{n} 2^{n-i} v_i \right) \right]^{j_1} \right.$$

$$\left. \prod_{h=2}^{n} \left[2^{h-n-1} \left(u + \sum_{i=h+1}^{n} 2^{n-i} v_i - v_h \right) \right]^{j_h} \right\}$$

$$= \sum_J \left\{ a_{J(I+J)} 2^{-\left[(n-1)j_1 + \sum\limits_{h=2}^{n} (n-h+1) j_h\right]} \right.$$

$$\left. \left[u^{|J|} + \sum_{k=2}^{n} 2^{n-k} \left(\sum_{h=1}^{k-1} j_h - j_k \right) u^{|J|-1} v_k + O\big(|(v_2, \cdots, v_n)|^2 \big) \right] \right\}.$$

因此

$$E_{(0,I)}^{(ke_1)} = \sum_{|J|=k} a_{J(I+J)} 2^{-\left[(n-1)j_1 + \sum\limits_{h=2}^{n} (n-h+1) j_h\right]},$$

$$E_{(0,I)}^{(ke_1+e_l)} = \sum_{|J|=k+1} \left\{ a_{J(I+J)} 2^{-\left[(n-1)j_1 + \sum\limits_{h=2}^{n} (n-h+1) j_h\right]} \right. \tag{4.4.11}$$

$$\left. 2^{n-l} \left(\sum_{h=1}^{l-1} j_h - j_l \right) \right\}.$$

由 Cauchy 估计，

$$\left| E_{(0,I)}^{ke_1} \right| = \left| \sum_{|J|=k} a_{J(I+J)} 2^{-\left[(n-1)j_1 + \sum\limits_{h=2}^{n} (n-h+1) j_h\right]} \right|$$

$$\leq \sum_{|J|=k} \frac{\|E\|_r}{R^{I+2J}} 2^{-\left[(n-1)j_1 + \sum\limits_{h=2}^{n} (n-h+1) j_h\right]}$$

$$= \sum_{|J|=k} \frac{\|E\|_r}{R^I} \frac{2^{-\left[(n-1)j_1 + (n-1)j_2 + \cdots + j_n\right]}}{(2^{2-n} r^2)^{j_1} (2^{2-n} r^2)^{j_2} \cdots (r^2)^{j_n}}$$

$$\leq \frac{(k+1)^n \|E\|_r}{R^I (2r^2)^k},$$

$$\left| E_{(0,I)}^{ke_1+e_l} \right| = \left| \sum_{|J|=k+1} \left\{ a_{J(I+J)} 2^{-\left[(n-1)j_1 + \sum\limits_{h=2}^{n} (n-h+1) j_h\right]} \right. \right.$$

$$\left. \left. 2^{n-l} \left(\sum_{h=1}^{l-1} j_h - j_l \right) \right\} \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{|J|=k+1} \frac{\|E\|_r}{R^{I+2J}} 2^{-\left[(n-1)j_1+\sum\limits_{h=2}^{n}(n-h+1)j_h\right]} 2^{n-l}\left|\sum_{h=1}^{l-1} j_h - j_l\right| \\
&\leq \sum_{|J|=k+1} \frac{\|E\|_r}{R^I\cdot(2r^2)^{k+1}} 2^n(k+1) \\
&= \frac{2^n(k+2)^n\|E\|_r}{R^I(2r^2)^{k+1}}.
\end{aligned}
$$

这里我们用到了下述事实：

$$
\begin{aligned}
\sharp\Big\{(j_1,j_2,\cdots,j_n)\in\mathbb{Z}^n：&\text{对 } 1\leq h\leq n,\ \text{有 } j_h\geq 0 \text{ 且} \\
&j_1+j_2+\cdots+j_n=k\Big\}\leq(k+1)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

这就完成了引理 4.4.2 的证明. ∎

为了利用快速迭代法，我们还需要方程 (4.4.7) 的解 (4.2.46) 的下述估计：

命题 4.4.1 假设 $w=|z|^2+E(z,\bar{z})$ 形式等价于 M_∞，E 在 $\overline{D_r}$ 上全纯，且 $\mathrm{Ord}(E)\geq d$. 那么由 (4.2.46) 给出的解满足下述估计：

$$
\begin{aligned}
|\hat{f}_h|_\varrho, |\hat{g}|_\varrho &\leq \frac{C(n)(2d)^{2n}\|E\|_r}{r-\varrho}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{d-1}, \\
|\nabla\hat{f}_h|_\varrho, |\nabla\hat{g}|_\varrho &\leq \frac{C(n)(2d)^{2n}\|E\|_r}{(r-\varrho)^3}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{\frac{d-1}{2}}, \qquad (4.4.12)\\
|\hat{\varphi}|_\varrho &\leq \frac{(2d)^{2n}\|E\|_r}{(r-\varrho)^{2n}}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{2d-2},
\end{aligned}
$$

其中 $C(n)=3^3n(n+1)2^{n+3}$.

证 由 $\hat{f}$ 的定义 (由 (4.4.8) 给出)，可以看出 $\mathrm{Ord}(\hat{f})\geq d-1$ 且 $\deg_{wt}\leq 2d-4$. 根据 (4.2.46)，对于 $2\leq h\leq n$，可以得到

$$
\hat{f}_h = A_1+A_2+A_3+A_4,
$$

其中

$$
A_1=\sum_{d\leq 2k+2\leq 2d-3}\frac{1}{2}z_h\left(-\sum_{j=2}^{h-1}\mathrm{Re}\big(E_{(0,0)}^{(ke_1+e_j)}u^k\big)-2\mathrm{Re}\big(E_{(0,0)}^{(ke_1+e_h)}u^k\big)\right),
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \sum_{i>h,\ d\le 2k+2\le 2d-3} z_i E^{(ke_1)}_{(e_i,e_h)} u^k,\\
A_3 &= \sum_{|J|\ge 1,\ d\le |J|+2k+1\le 2d-3} z^J E^{(ke_1)}_{(J,e_h)} u^k,\\
A_4 &= \sum_{|I|\ge 1,\ d\le |I|+2k\le 2d-3} z^{I+e_h} u^{k-1} \overline{E^{(ke_1)}_{(0,I)}}\\
&\quad + \sum_{|I|\ge 1,\ d\le |I|+2k+2\le 2d-3} \sum_{i=0}^{n-h-1} z^{I+e_h} u^k \overline{E^{(ke_1+e_{n-i})}_{(0,I)}}\\
&\quad - \sum_{|I|\ge 1,\ d\le |I|+2k+2\le 2d-3} z^{I+e_h} u^k \overline{E^{(ke_1+e_h)}_{(0,I)}}\\
&:= B_1 + B_2 + B_3.
\end{aligned}
$$

由引理 4.4.2，对于 B_1，我们有如下估计：

$$
\begin{aligned}
\|B_1\|_\varrho &= \left\| \sum_{|I|\ge 1,\ d\le |I|+2k\le 2d-3} z^{I+e_h} u^{k-1} \overline{E^{(ke_1)}_{(0,I)}} \right\|_\varrho\\
&\le \sum_{|I|\ge 1,\ d\le |I|+2k\le 2d-3} (R')^{I+e_h} (2\varrho^2)^{k-1} \frac{(k+2)^n \|E\|_r}{R^I \cdot (2r^2)^k}\\
&\le \sum_{|I|\ge 1,\ d\le |I|+2k\le 2d-3} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{|I|+2k-1} \frac{(k+2)^n \|E\|_r}{2r}\\
&\le \sum_{|I|\ge 1,\ d\le |I|+2k\le 2d-3} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{|I|+2k-1} (2d)^n \|E\|_r\\
&\le \frac{(2d)^{2n}\|E\|_r}{r-\varrho} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{d-1}.
\end{aligned}
$$

这里且在本章下文中，总是记

$$
R' = \left(2^{-\frac{n-2}{2}}\varrho, 2^{-\frac{n-2}{2}}\varrho, 2^{-\frac{n-3}{2}}\varrho, \cdots, 2^{-\frac{1}{2}}\varrho, \varrho\right).
$$

同时我们用到了下述事实：

$$
\sharp\left\{ (i_1, i_2, \cdots, i_n, k) \in \mathbb{Z}^{n+1}:\ \text{对于 } 1\le h\le n \text{ 有} \right.
\left. i_h, k\ge 0,\ \sum_{h=1}^n i_h + 2k = 2d-1 \right\} \le (2d)^n.
$$

对于 B_2，我们有

$$\begin{aligned}
\|B_2\|_\varrho &= \left\| \sum_{|I|\geq 1,\ d\leq |I|+2k+2\leq 2d-3} \sum_{i=0}^{n-h-1} z^{I+e_h} u^k \overline{E_{(0,I)}^{(ke_1+e_{n-i})}} \right\|_\varrho \\
&\leq \sum_{|I|\geq 1,\ d\leq |I|+2k+2\leq 2d-3} (R')^{I+e_h}(2r'^2)^k \cdot n \frac{2^n(k+2)^n \|E\|_r}{R^I\cdot (2r^2)^{k+1}} \\
&\leq \sum_{|I|\geq 1,\ d\leq |I|+2k+2\leq 2d-3} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{|I|+2k+1} \frac{n2^n(k+2)^n\|E\|_r}{2r} \\
&\leq \frac{n2^n(2d)^{2n}\|E\|_r}{r-\varrho}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{d-1}.
\end{aligned}$$

同理，有

$$\|B_3\|_\varrho \leq \frac{2^n(2d)^{2n}\|E\|_r}{r-\varrho}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{d-1}.$$

因此

$$\|A_4\|_\varrho \leq \frac{n2^{n+1}(2d)^{2n}\|E\|_r}{r-\varrho}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{d-1}.$$

同理，可以证明

$$\|A_1\|_\varrho, \|A_2\|_\varrho, \|A_3\|_\varrho \leq \frac{n\cdot 2^{n+1}(2d)^{2n}\|E\|_r}{r-\varrho}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{d-1},$$

所以

$$|\hat{f}_h|_\varrho \leq \frac{n\cdot 2^{n+3}(2d)^{2n}\|E\|_r}{r-\varrho}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{d-1}.$$

令 $\tau = \frac{r+2\varrho}{3}$ 且运用 Cauchy 估计，我们得到 F 的微分的估计:

$$\left.\begin{aligned}
|(\hat{f}_h)'_{z_i}|_\varrho &\leq \frac{\tau|\hat{f}_h|_\tau}{(\tau-\varrho)^2} \leq \frac{3^3 n\cdot 2^{n+3}(2d)^{2n}\|E\|_r}{(r-\varrho)^3}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{\frac{d-1}{2}}, \\
|(\hat{f}_h)'_w|_\varrho &\leq \frac{2\tau^2|\hat{f}_h|_\tau}{(2\tau^2-2(\varrho)^2)^2} \leq \frac{3^3 n\cdot 2^{n+3}(2d)^{2n}\|E\|_r}{(r-\varrho)^3}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{\frac{d-1}{2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.4.13}$$

这里用到了下述事实 (参见 [Mos85], p. 407):

$$\left(\frac{\tau}{r}\right)^2 \leq \frac{\varrho}{r} \text{ 对所有 } \frac{1}{2} < \varrho < \tau < r \leq 1,\ \tau = \frac{r+2\varrho}{3} \text{ 成立.} \tag{4.4.14}$$

由不等式 (4.4.13)，有

$$|\nabla \hat{f}_h|_\varrho \leq \frac{3^3 n(n+1)\cdot 2^{n+3}(2d)^{2n}\|E\|_r}{(r-r')^3}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{\frac{d-1}{2}}.$$

相应的 $\hat{f}_1$ 和 $\hat{g}$ 的估计同理可得.

现在估计 $\hat{\varphi}$. 注意到 $-\hat{g}(z,u)+2\mathrm{Re}\left(\sum_{h=1}^n \bar{z}_i\hat{f}_i(z,u)\right)$ 恰好消去了 E 中的次数 $<2d-2$ 的项. 由 (4.4.9)，有

$$
\begin{aligned}
\|\hat{\varphi}\|_\varrho &= \Big\| \sum_{t\ge 2d-2} E^{(t)} \Big\|_\varrho \\
&= \Big\| \sum_{|I|+|J|\ge 2d-2} a_{i_1\cdots i_n j_1\cdots j_n} z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n}\overline{z_1}^{j_1}\cdots\overline{z_n}^{j_n} \Big\|_\varrho \\
&\le \sum_{|I|+|J|\ge 2d-2} \|E\|_r \left(\frac{R'}{R}\right)^{I+J} \\
&\le \sum_{|I|+|J|=2d-2,\ |K|,|L|\ge 0} \Bigg[\|E\|_r \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{|I|+|J|}\cdot\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k_n} \\
&\qquad \cdot\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{l_1}\cdots\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{l_n}\Bigg] \\
&\le \sum_{|I|+|J|=2d-2} \|E\|_r \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{2d-2}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{\varrho}{r}}\right)^{2n} \\
&\le \frac{(2d)^{2n}\|E\|_r}{(r-\varrho)^{2n}}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{2d-2}.
\end{aligned}
$$

这里用到了下述事实:

$$
\sharp\Bigg\{(i_1,\cdots,i_n,j_1,\cdots,j_n)\in\mathbb{Z}^{2n}:\ 1\le h\le n\ \text{时},\ i_h,j_h\ge 0,
\\
\sum_{h=1}^n (i_h+j_h)=k\Bigg\}\le (k+1)^{2n}.
$$

这就证明了命题 4.4.1. ∎

命题 4.4.2 假设 $E,r,\varrho,C(n)$ 满足命题 4.4.1 中的条件，那么存在一个常数 $\delta>0$ 使得对于

$$
\frac{C(n)(2d)^{2n}\|E\|_r}{(r-\varrho)^3}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{\frac{d-1}{2}}<\delta, \tag{4.4.15}
$$

$\Psi(z',w'):=\Theta^{-1}(z',w')$ 在 $\overline{\triangle_\sigma}$ 里有定义. 进一步，还有 $\Psi(\triangle_{r'})\subset\triangle_\sigma$，$\Psi(\triangle_\sigma)\subset\triangle_\varrho$，$E'(z,\xi)$ 在 $\overline{\triangle_\sigma}$ 里全纯且

$$
\|E'\|_{r'}\le C_d\|E\|_r^2+\widetilde{C_d}\|E\|_r, \tag{4.4.16}
$$

其中

$$C_d = \frac{(2n+1)\cdot 3^3 C(n)(2d)^{2n}}{(r-r')^3}\left(\frac{r'}{r}\right)^{\frac{d-1}{4}} + \left(\frac{r'}{r}\right)^{d-1} n\cdot\left(\frac{3C(n)(2d)^{2n}}{r-r'}\right)^2,$$

$$\widetilde{C_d} = \frac{3^{2n}\cdot(2d)^{2n}}{(r-r')^{2n}}\left(\frac{r'}{r}\right)^{d-1}.$$

证　我们需要对所有的 $(z',w')\in\overline{\triangle_\sigma}$，下述方程组有唯一的解：

$$\begin{cases} z' = z + \hat{f}(z,w), \\ w' = w + \hat{g}(z,w), \end{cases}$$

其中 $(z,w)\in\triangle_\varrho$. 由 (4.4.12)，选取 δ 足够小使得

$$|\nabla\hat{f}|_\varrho + |\nabla\hat{g}|_\varrho < \frac{1}{2n+4} \text{ 且 } |\hat{f}|_\varrho + |\hat{g}|_\varrho < \frac{1}{2n+4}\cdot(r-\varrho).$$

定义 $(z^{[1]},w^{[1]})=(z',w')\in\triangle_\sigma$，且归纳定义 $(z^{[j]},w^{[j]})$:

$$\begin{cases} z^{[j+1]} = z' - \hat{f}(z^{[j]},w^{[j]}), \\ w^{[j+1]} = w' - \hat{g}(z^{[j]},w^{[j]}). \end{cases}$$

由标准的 Picard 迭代程序，可以唯一得到 $(z,w)\in\triangle_\varrho$ 满足 $\Psi^{-1}(z,w)=(z',w')$，这样就有 $\Psi(\triangle_\sigma)\subset\triangle_\varrho$. 事实上，首先我们有，如果 $z^{[j]},w^{[j]}\in\triangle_\varrho$，那么

$$z^{[j+1]} = \left|z' - \hat{f}(z^{[j]},w^{[j]})\right| \le \sigma + \frac{1}{2}\cdot(r-\varrho) < \varrho,$$

$$w^{[j+1]} = \left|w' - \hat{g}(z^{[j]},w^{[j]})\right| \le \sigma + \frac{1}{2}\cdot(r-\varrho) < \varrho.$$

这样可以归纳证明，对任意的正整数 j，都有 $z^{[j]},w^{[j]}\in\triangle_\varrho$. 其次，我们有

$$\begin{aligned} &\|z^{[j+1]}-z^{[j]}\|_\varrho + \|w^{[j+1]}-w^{[j]}\|_\varrho \\ &\quad= \|\hat{f}(z^{[j]},w^{[j]}) - \hat{f}(z^{[j]},w^{[j-1]})\|_\varrho \\ &\qquad+ \|\hat{g}(z^{[j]},w^{[j]}) - \hat{g}(z^{[j]},w^{[j-1]})\|_\varrho \\ &\quad\le \left(|\nabla\hat{f}|_\varrho + |\nabla\hat{g}|_\varrho\right)\left(\|z^{[j]}-z^{[j-1]}\|_\varrho \right.\\ &\qquad\left.+ \|w^{[j]}-w^{[j-1]}\|_\varrho\right) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\|z^{[j]} - z^{[j-1]}\|_\varrho + \|w^{[j]} - w^{[j-1]}\|_\varrho\right).$$

这样存在和唯一性易得. 同理, 有 $\Psi(\triangle_{r'}) \subset \triangle_\sigma$, 因此, E' 在 $\triangle_\sigma$ 中全纯. 进一步,

$$\|E'\|_{r'} \leq \|Q\|_\sigma, \tag{4.4.17}$$

其中

$$Q = (\hat{g}(z,\Phi) - \hat{g}(z,u)) - 2\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{z_i}\left(\hat{f}_i(z,\Phi) - \hat{f}_i(z,u)\right)\right) - \left|\hat{f}(z,\Phi)\right|^2 + \hat{\varphi}(z,\bar{z}). \tag{4.4.18}$$

注意

$$\begin{aligned}|(\hat{g}(z,\Phi) - \hat{g}(z,u)|_\sigma &\leq |\nabla\hat{g}|_\varrho \cdot \|E\|_r \\ &\leq \frac{C(n)(2d)^{2n}\|E\|_r^2}{(r-\varrho)^3}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{\frac{d-1}{2}} \\ &\leq \frac{3^3 C(n)(2d)^{2n}\|E\|_r^2}{(r-r')^3}\left(\frac{r'}{r}\right)^{\frac{d-1}{4}},\end{aligned} \tag{4.4.19}$$

这里用到了 $(\frac{\varrho}{r})^2 < \frac{r'}{r}$ (这可以用 (4.4.14) 的方法同理得到). 同时我们有

$$\left|(\hat{f}_i(z,\Phi) - \hat{f}_i(z,u)\right|_\sigma \leq \frac{3^3 C(n)(2d)^{2n}\|E\|_r^2}{(r-r')^3}\left(\frac{r'}{r}\right)^{\frac{d-1}{4}},$$

对于 $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}(z,\Phi)\right|_\sigma^2 &\leq n \cdot \left[\frac{C(n)(2d)^{2n}\|E\|_r}{r-\sigma}\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{d-1}\right]^2 \\ &\leq n \cdot \left(\frac{3C(n)(2d)^{2n}\|E\|_r}{r-r'}\right)^2\left(\frac{r'}{r}\right)^{d-1},\end{aligned}$$

$$\|\hat{\varphi}\|_\sigma \leq \frac{(2d)^{2n}\|E\|_r}{(r-\sigma)^{2n}}\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{2d-2} \leq \frac{3^{2n}(2d)^{2n}\|E\|_r}{(r-r')^{2n}}\left(\frac{r'}{r}\right)^{d-1}. \tag{4.4.20}$$

由 (4.4.18)~(4.4.20)，有

$$\|E'\|_{r'} \leq \left[\frac{(2n+1)\cdot 3^3 C(n)(2d)^{2n}}{(r-r')^3}\left(\frac{r'}{r}\right)^{\frac{d-1}{4}} + \left(\frac{r'}{r}\right)^{d-1} n\cdot\left(\frac{3C(n)(2d)^{2n}}{r-r'}\right)^2\right]\|E\|_r^2 + \frac{3^{2n}\cdot(2d)^{2n}}{(r-r')^{2n}}\left(\frac{r'}{r}\right)^{d-1}\|E\|_r.$$

这样我们证明了命题 4.4.2. ■

现在转到主要定理 1.2.5 的证明. 定义 r_v, ϱ_v, σ_v 如下:

$$r_v = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{v+1}\right),\quad \varrho_v = \frac{1}{3}(2r_v + r_{v+1}),\quad \sigma_v = \frac{1}{3}(2r_v + \varrho_v).$$

我们将对所有的 $r = r_v$，$\varrho = \varrho_v$，$\sigma = \sigma_v$，$r' = r_{v+1}$，$\Psi = \Psi_v$，$\cdots$，$v = 0, 1, \cdots$，运用前面的估计. 那么有 (参见 [(4.5), Moser]):

$$(r_v - r_{v+1})^{-1} = 2(v+1)(v+2),\ \frac{r_{v+1}}{r_v} = 1 - \frac{1}{(v+2)^2}. \quad (4.4.21)$$

定义如下的一列实解析子流形:

$$M_k\ :\ w = |z|^2 + E_k(z,\bar{z}),$$

满足 $M_0 = M$, $M_{v+1} = \Psi_v^{-1}(M_v)$ 对所有 $v = 0, 1, 2, \cdots$，其中 Ψ_v 是从 $\triangle_{\sigma_v}$ 到 $\triangle_{\varrho_v}$ 的双全纯映射. 记

$$d_v = \mathrm{Ord}(E_v),\quad \Phi_v = \Psi_0\circ\Psi_1\circ\cdots\circ\Psi_v.$$

因为 $s = \infty$，所以

$$\mathrm{Ord}(E_v) = d_v \geq 2^v + 2 \text{ 对 } v \geq 0.$$

我们给出下面的基本事实:

引理 4.4.3 假设存在一个常数 C 和一个正数 $a > 1$ 使得 $d_v \geq Ca^v$. 那么对于任何正整数 $m_1, m_2, m_3 > 0$,

$$\lim_{v\to\infty} v^{m_3} d_v^{m_1}\left(1 - \frac{1}{v^{m_2}}\right)^{d_v} = 0.$$

利用 (4.4.21) 和引理 4.4.3，我们有

$$\lim_{v\to\infty} C_{d_v} = 0,\quad \lim_{v\to\infty} \widetilde{C_{d_v}} = 0.$$

因此 C_{d_v} 和 $\widetilde{C_{d_v}}$ 有界. 令 $C_{d_v},\widetilde{C_{d_v}}<C$，其中 C 是一个固定的正常数. 选取 $\eta_0^*=\|E_0\|_{r_0}$ 足够小，可以有 (4.4.15) 的假设对所有的 $v\geq 0$ 成立. 事实上，我们进一步有 $\|E_v\|_{r_v}\leq \epsilon 2^{-v}$ 对所有的 $v\geq 0$，$1>\epsilon>0$ 成立.

选取 N 足够大，使得当 $v\geq N$ 时，$C_{d_v},\widetilde{C_{d_v}}\leq\frac{1}{4}$. 假设 $C>1$ 且选取 E_0 使得 $\eta_0^*=\epsilon(2C)^{-2N}<1$. 那么有

(1) 当 $v\leq N$ 时，有

$$\begin{aligned}\|E_v\|_{r_v}\leq& C(\|E_{v-1}\|_{r_{v-1}}+1)\|E_{v-1}\|_{r_{v-1}}\leq 2C\cdot\|E_{v-1}\|_{r_{v-1}}\\ \leq&(2C)^v\|E_0\|_{r_0}\leq\epsilon(2C)^{v-2N}\leq\epsilon 2^{-N}.\end{aligned}$$

(2) 当 $v>N$ 时，有

$$\|E_v\|_{r_v}\leq\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\|E_{v-1}\|_{r_{v-1}}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{v-N}\|E_N\|_{r_N}\leq\epsilon 2^{-v}.$$

现在，选取 ϵ 足够小. 由 (4.4.12) 和命题 4.4 我们得到对某个常数 C_0，有

$$\|\mathrm{d}\Psi_v^{-1}\|_{\triangle_{\varrho_v}}\leq 1+C_0\|E_v\|_{r_v}\leq 1+C_0\epsilon 2^{-v}.$$

注意到 Ψ_v 把 $\triangle_{\sigma_v}$ 映射到 $\triangle_{\varrho_v}$. 由 Cramer 法则，有对某个常数 C_1，$\|\mathrm{d}\Psi_v\|_{\triangle_{\sigma_v}}\leq 1+\epsilon C_1 2^{-v}$. 现在 Φ_v 在 $\triangle_{\frac{1}{2}}$ 中的收敛性可以由下述事实得到：

$$\prod_{v=0}^{\infty}\|\mathrm{d}\Psi_v\|_{\triangle_{\sigma_v}}\leq\prod_{v=0}^{\infty}(1+\epsilon C_1 2^{-v})<\infty,$$

这样就完成了定理 1.2.5 的证明. ∎

注 4.4.1 我们注意到定理 1.2.5 中把 $(M,0)$ 映到二次型 $(M_\infty,0)$ 的映射可能不收敛，因为 $\mathrm{aut}_0(M_\infty)$ 包含许多不收敛的元素，这与 CR 情形有很大的不同. 在特定的不太退化的假设下，形式映射总是收敛的. 关于这方面的讨论，有兴趣的读者可以参见综述性文章 [BER00b].

参考文献

[BER00a] Baouendi S, Ebenfelt P, Rothschild L. Convergence and finite determination of formal CR mappings. *J. Amer. Math. Soc.*, 13 (4): 697-723.

[BER00b] Baouendi S, Ebenfelt P, Rothschild L. Local geometric properties of real submanifolds in complex space. *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.), 2000, 37 (3): 309-333.

[BER99] Baouendi S, Ebenfelt P, Rothschild L. Real Submanifolds in Complex Space and Their Mappings. *Princeton Mathematical Series*, 47, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999.

[BMR02] Baouendi S, Mir N, Rothschild L. Reflection ideals and mappings between generic submanifolds in complex space. *J. Geom. Anal.*, 2002, 12: 543-580.

[BG84] Bedford E, Gaveau B. Envelopes of holomorphy of certain 2-spheres in $\mathbf{C}^2$. *Amer. J. Math.*, 1983 (105): 975-1009.

[Bis65] Bishop E. Differentiable manifolds in complex Euclidean space. *Duke Math. J.*, 1965 (32): 1-21.

[Ca32a] Cartan É. Sur les variétés pseudo-conformal des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1932, 11 (4): 17-90.

[Ca32b] Cartan É. Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de deux variables complexes, II. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 1932, 1: 333-354.

[CJ96] Chern S S, Ji S. On the Riemann mapping theorem.

Ann. of Math., 1996, 144: 421-439.

[CM74] Chern S S, Moser J K. Real hypersurfaces in complex manifolds. *Acta Math.*, 1974, 133: 219-271.

[Cof] Coffman A. Unfilding CR singularities, 2006, to appear in *Memoris of the AMS.*

[Cof06] Coffman A. Analytic stability of the CR cross-cap. *Pacific Jour. of Math.*, 2006, 226 (2): 221-258.

[DTZ05] Dolbeault P, Tomassini G, Zaitsev D. On Levi-flat hypersyrfaces with prescribed boundary. Preprint. (Announcement of the paper appears at *C.R. Acd. Sci. Paris, Ser. I*, 2005, 341: 343-348.)

[Eli97] Eliashberg Y. Filling by holomorphic discs and its applications, Geometry of Low-Dimensional Manifolds. *London Math. Soc. Lecture Notes*, 1997, 151.

[Fe74] Fefferman C. The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudo-convex domains. *Invent. Math.*, 1974, 37: 1-65.

[Fo04] Forstneric F. Most real analytic Cauchy-Riemann manifolds are nonalgebraizable. *Manuscripta Math.*, 2004, 115: 489-494.

[Gon94a] Gong X. On the convergence of normalizations of real analytic surfaces near hyperbolic complex tangents. *Comment. Math. Helv.*, 1994, 69 (4): 549-574.

[Gon94b] Gong X. Normal forms of real surfaces under unimodular transformations near elliptic complex tangents. *Duke Math. J.*, 1994, 74 (1): 145-157.

[Gon04] Gong X. Existence of real analytic surfaces with hyperbolic complex tangent that are formally but not holomorphically equivalent to quadrics. *Indiana Univ. Math. J.*, 2004, 53, (1): 83-95.

[Gro85] Gromov M. Pseudo holomorphic curves in symplectic geometry. *Invent Math.*, 1985, 82: 307-347.

[Ho73] Hörmander L. *An introduction to complex analysis in serveral variables.* North Holland, Amsterdam, 1973.

[Hu04] Huang X. Local Equivalence Problems for Real Submanifolds in Complex Spaces. *Lecture Notes in Mathematics* 1848 (C. I. M. E. series), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2004: 109-161.

[Hu01] Huang X. On some problems in several complex variables and Cauchy-Riemann Geometry, Proceedings of ICCM (edited by L. Yang and S. T. Yau). *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, 2001, 20: 383-396.

[Hu98] Huang X. On an n-manifold in $\mathbf{C}^n$ near an elliptic complex tangent. *J. Amer. Math. Soc.*, 1998 (11): 669-692.

[Hu94] Huang X. Geometric Analysis in Several Complex Variables. Ph. Thesis, Washington University, August 1994.

[HK95] Huang X, Krantz S. On a problem of Moser. *Duke Math. J.*, 1995 (78): 213-228.

[HJ98] Huang X, Ji S. Global holomorphic extension of a local map and a Riemann mapping Theorem for algebraic domains. *Math. Res. Lett*, 1998, 5: 247-260.

[HJY01] Huang X, Ji S, Yau S S T. An example of a real analytic strongly pesudoconvex hypersurface which is not holomorphically equivalent to any algebraic hypersurface. *Ark. Mat.*, 2001 (39): 75-93.

[HY07] Huang X, Yin W. A Bishop surface with a vanishing Bishop invariant. Preprint, March, 2007 (37 pages) (arXiv:0704.2040).

[HY08] Huang X, Yin W. A codimension two CR singular submanifold that is formally equivalent to a symmetric quadric. Preprint, Febraury, 2008 (24 pages) (arXiv:0803.0074).

[IK99] Isaev A V, Krantz S G. Domains with non-compact automorphism group. *A survey. Advances in Math*, 1999, 146:

1-38.

[Ji02] Ji S. Algebraicity of real analytic hypersurfaces with maxium rank. *Amer. Jour. Math.*, 2002, 124: 255-264.

[Kr82] Krantz G. *Function theory of several complex variables.* John Wiley, Sons, New York, 1982.

[Kr04] Krantz G. *Complex analysis: the geometric viewpoint.* 2nd edition. Washington, DC, Mathematical Association of America, 2004.

[KW82] Kenig C, Webster S. The local hull of holomorphy of a surface in the space of two complex variables. *Invent. Math.*, 1982, 67: 1-21.

[KW84] Kenig C, Webster S. On the hull of holomorphy of an n-manifold in $\mathbb{C}^n$. *Annali Scoula Norm. Sup. de Pisa IV*, 1984, 11 (2): 261-280.

[Le77] Lewy H. On the boundary behavior of holomorphic mappings. *Acad. Naz. Lincei*, 1977, 35: 1-8.

[Mir02] Mir. Convergence of formal embeddings between real-analytic hypersurfaces in codimension one. *J. Differential Geom.*, 2002, 62: 163- 173.

[MMZ03] Meylan F, Mir N, Zaitsev D. Approximation and convergence of formal CR-mappings. *International Mathematics Research Notices*, 2003 (4): 211-242.

[Mos85] Moser J. Analytic surfaces in $\mathbb{C}^2$ and their local hull of holomorphy. *Annales Aca -demiæFennicae Series A.I. Mathematica*, 1985 (10): 397-410.

[MS71] Siegel C L, Moser J K. *Lectures on Celestial Mechanics.* Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[MW83] Moser J, Webster S. Normal forms for real surfaces in $\mathbb{C}^2$ near complex tangents and hyperbolic surface transformations. *Acta Math.*, 1983, 150: 255-296.

[Pi75] Pinchuk S I. On the analytic continuation of holo-

morphic mappings. *Math. USSR Sbornik*, 1975, 27: 375-392. MR 52:14371.

[Po1907] Poincaré H. Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme. *Ren. Cire. Mat. Palermo, II.* 1907, 23: 185-220.

[Rud80] Rudin W. *Function theory in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$. New York, Springer-Verlag, 1980.

[Si88] Siegel C L. *Topics in complex function theory.* Vol. 1. John Wiley, Sons, 1988.

[Sto] Stolovitch L. Family of intersecting totally real manifolds of $(\mathbb{C}^n, 0)$ and CR-singularities. Preprint, 2006.

[Ta62] Tanaka N. On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of complex variables. *J. Math. Soc. Japan*, 1962, 14: 397-429.

[Ta67] Tanaka N. On generalized graded Lie algebras and geometric structures, I. *J. Math. Soc. Japan*, 1967, 19: 215-254.

[Web77] Webster S. On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces. *Invent. Math.*, 1977, 43: 53-68.

[Web03] Webster S. Pairs of Intersecting Real Manifolds in Complex Space. *Asian Jour. Math*, 2003, 7 (4): 449-462.

致　谢

九度风雨，九度春秋；享受过丰收的喜悦，也品味过失落的酸楚. 是那一次一次迷津指点，许多许多无私关怀，伴随着我走出绝望，带着感恩，迈向希望.

首先我要感谢我的恩师黄孝军教授，是他带领我一步步迈入了高深而又美妙的数学殿堂，让我能一窥其中之妙. 他深厚渊博的学术功底、对数学孜孜不倦的追求，深深地感染着我，并将成为我终身学习的楷模；他严谨求实的治学态度、谦虚正直的人生哲学、朴实无华的生活作风，潜移默化地教会了我做人的道理. 我生活和学习中的每一丝进步无不浸注着黄老师的敦敦教诲和殷切期望. 与黄老师学术上讨论，常常给予我柳暗花明、醍醐灌顶般的惊喜. 另外，我还要感谢黄老师的精心安排，使我有幸访问了香港中文大学、香港大学和美国 Rutgers 大学，从而有机会向那里的一流数学家学习；同时，我还要特别感谢 Luk 教授和莫毅明教授的热情邀请.

在珞珈的这段日子里，我还有幸得到了陈化教授在学习上耐心的指点和生活上无私的帮助. 陈老师渊博的知识、严谨的态度、宽广的胸怀、无私奉献的精神和对我无微不至的关怀激励着我不断努力进取，奋发图强；同时我也很荣幸地能跟陈老师领悟一些偏微分方程，特别是微局部分析之美妙.

在这里，我还要特别感谢涂振汉教授和嵇善瑜教授. 涂老师开设的多复变与复几何课程和深入浅出的讲解，以及组织的富有启发性的讨论班，使我对多复变与复几何的认识不断地深入；同时感谢嵇善瑜教授不远万里来武汉大学开课讲授数学中的一些前沿问题，并给了我许多有启发性的建议，极大地开阔了我的视野.

与此同时，我还要感谢陈文艺教授、陈群教授和刘伟安教授等

的关心和帮助. 陈文艺教授睿智的思维、陈群教授深邃的洞察力、刘伟安教授精深的造诣、汪更生教授渊博的学识、赵会江教授严谨的治学态度、刘晓春教授扎实的基本功、康肖松教授清晰的语言，以及他们的学识和人品都是我效仿的楷模.

在此，我还要感谢院领导尹常倬书记和梁涛书记给予的支持和鼓励，以及金勇老师和王忠海老师等提供的帮助.

我还想借此机会感谢黄孝军老师和他的家人以及张媛、袁原、李四维和汪渝等同学对我在 Rutgers 大学访问期间提供的帮助. 同时感谢李维喜、王灵君、李平丽、曹红哲、张莎莎、黄学英、史薇、王光明和徐剑等同学，与他们的讨论使我受益匪浅，同时也带来了无尽的欢乐和珍贵的友情.

我还想感谢我的家人和女朋友杨占英，是他们的支持和鼓励给了我勇往直前、排除困难的动力和信心.

值此论文付梓之际，我想对所有曾经给予我关心和支持的人致以深深的谢意！

尹万科

2008 年 6 月于珞珈山

[General Information]
□□=□□□□□□□□□□□□□□
□□=□□□□
□□=105
SS□=13487294
DX□=
□□□□=2014.01
□□□=□□□□□□□